Probeprüfung 1

Aufgabe 1 :

Beantworte die folgenden Kurzaufgaben

(a) **[1 Punkt]** Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^5 + 2x^3 + 2x + 1}{2x^6 + 8x + 9}.$$

(b) **[2 Punkte]** Bestimme den Grenzwert der Funktion

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^4 - 16}.$$

Du darfst dabei die Regel von l'Hôpital **nicht** benutzen.

(c) **[3 Punkte]** Berechne alle Fixpunkte der rekursiven Folge $x_{n+1} = f(x_n)$, wobei

$$f(x) = \frac{3}{2+x}$$

gegeben ist.

(d) **[3 Punkte]** Berechne die Ableitung von $e^{\sqrt{x^3}}$.

Solution:

(a) Der Grad im Zähler ist kleiner als im Nenner, deswegen ist der Grenzwert $= 0$.

(b) Es gilt $x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$ und somit

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^4-16} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(x^2-4)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{1}{32}$$

(c) Die Fixpunktgleichung lautet $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Somit sind die Fixpunkte gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{3}{2+\tilde{x}} &= \tilde{x} \\ \Longrightarrow \tilde{x}^2 + 2\tilde{x} - 3 &= 0 \\ \Longrightarrow \tilde{x}_{1,2} &= -3, 1 \end{aligned}$$

(d) Die Ableitung kann durch Anwenden der Kettenregel und $\sqrt{x} = x^{1/2}$ berechnet werden. Wir erhalten

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}e^{\sqrt{x^3}}$$

Aufgabe 2 :

Es sei die folgende Funktion gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(x) & x < \frac{\pi}{4} \\ ax & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

(a) **[3 Punkte]** Wie muss a gewählt werden, sodass die Funktion stetig ist.

(b) **[1 Punkt]** Sei nun $a = \pi$. Ist die Funktion differenzierbar?

Solution:

(a) Damit die Funktion stetig ist in $x_0 = \frac{\pi}{4}$ muss

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin^2(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} ax$$

gelten. Die linke Seite ergibt

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin^2(x) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

und die rechte Seite ergibt

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} ax = \frac{a\pi}{4}$$

Somit erhalten wir

$$\frac{1}{2} = \frac{a\pi}{4} \implies a = \frac{2}{\pi}$$

(b) Wenn $a = \pi$ gilt, so ist wegen der ersten Teilaufgabe die Funktion nicht stetig. Das bedeutet aber auch, dass die Funktion nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3 :

Es sei die Funktion

$$f(x) = \ln(5x^3)$$

gegeben.

(a) **[2 Punkte]** Bestimme die Ableitung der Funktion.

(b) **[2 Punkte]** Bestimme die Tangente am Punkt $x_0 = 1$.

(c) **[2 Punkte]** Bestimme die zweite Ableitung der Funktion.

(d) **[1 Punkt]** Hat die Funktion $f(x)$ ein Maximum? Begründe.

(e) **[1 Punkt]** Ist die Funktion $f(x)$ links- oder rechtsgekrümmt?

Solution:

(a) Wir verwenden die Kettenregel und erhalten

$$f'(x) = \frac{1}{5x^3} \cdot 15x^2 = \frac{3}{x}.$$

(b) Die Tangentengleichung ist $l(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$. Auswerten der Funktion und der Ableitung bei $x_0 = 1$ ergibt $l(x) = 3(x-1)$.

(c) Die zweite Ableitung ist die Ableitung der Funktion $f'(x)$. Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$\left(\frac{3}{x}\right)' = -\frac{3}{x^2}.$$

(d) Die Funktion hat kein Maximum, da die erste Ableitung $f'(x) = \frac{3}{x}$ keine Nullstellen besitzt.

(e) Die Funktion ist rechtsgekrümmt, da $x^2 > 0$ und somit $f''(x) = -\frac{3}{x^2} < 0$ gilt.

Mathematik I/II

Aufgabe 4 :

Es sei die Reproduktionsfunktion $x_{n+1} = f(x_n)$ gegeben mit

$$f(x) = \frac{x+2}{x}$$

(a) **[2 Punkte]** Bestimme alle Fixpunkte.

(b) **[2 Punkte]** Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x)$.

(c) **[2 Punkte]** Welche der Fixpunkte sind auch Grenzwerte der rekursiven Folge, wenn wir einen Startwert nahe der Fixpunkte wählen?

Solution:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x}+2}{\tilde{x}} &= \tilde{x} \\ \Longrightarrow \tilde{x}^2 - \tilde{x} - 2 &= 0 \\ \Longrightarrow \tilde{x}_{1,2} &= -1, 2 \end{aligned}$$

(b) Die Ableitung der Funktion $f(x)$ ist mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x - (x+2) \cdot 1}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

(c) Wir bestimmen jeweils $|f'(\tilde{x})|$:

$$\begin{aligned} |f'(-1)| &= |-2| = 2 > 1 \\ |f'(2)| &= |-\frac{1}{4}| = \frac{1}{4} < 1 \end{aligned}$$

Somit ist nur $\tilde{x}_2 = 2$ auch ein Grenzwert der rekursiven Folge, wenn wir einen Startwert nahe von $\tilde{x}_2$ wählen.