

Probepfprüfung 2

Aufgabe 1 :

Beantworte die folgenden Kurzaufgaben

- (a) **[2 Punkte]** Bestimme den Grenzwert der Funktion

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln(x)}.$$

- (b) **[2 Punkte]** Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{x}$$

in Abhängigkeit von a

- (c) **[3 Punkte]** Sei $f(x) = \sin(x^2)$ und $T_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ das Taylorpolynom am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Bestimme die Koeffizienten a_0 , a_1 und a_2 .
- (d) **[3 Punkte]** Berechne das Integral

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 5} dx$$

Aufgabe 2 :

Es sei die folgende Differentialgleichung gegeben:

$$y'(x) = -(y(x) + 3)(y(x) - 4)$$

- (a) **[2 Punkte]** Bestimme die stationären Lösungen dieser Differentialgleichung.
- (b) **[2 Punkte]** In welchem Intervall muss der Anfangswert $y(0)$ gewählt werden, sodass die gesamte Lösung $y(x)$ streng monoton steigend ist?
- (c) **[4 Punkte]** Bestimme zwei Anfangswerte $y(0) = y_1$ und $y(0) = y_2$, sodass die gesamte Lösung $y(x)$ **genau einen** Wendepunkt besitzt?

Aufgabe 3 :

Es sei das Integral

$$\int \sin(x) \cos^2(x) dx$$

gegeben.

- (a) **[3 Punkte]** Bestimme die Stammfunktion dieses Integrals.
- (b) **[3 Punkte]** Gebe eine allgemeine Formel an für das Integral

$$\int f'(x) f^2(x) dx$$

für eine beliebige Funktion $f(x)$.

Aufgabe 4 :

Es sei die folgende Differentialgleichung gegeben:

$$y'(x) = -x^2 y(x) + e^{-\frac{1}{3}x^3}$$

- (a) **[2 Punkte]** Bestimme die homogene Lösung dieser Differentialgleichung.
- (b) **[3 Punkte]** Bestimme die inhomogene Lösung der Differentialgleichung.
- (c) **[1 Punkt]** Bestimme die fehlende Konstante mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und gebe die gesamte Lösung an.

Aufgabe 5 :

[8 Punkte] Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\sin(y(x))y'(x) = \cos(y(x))$$

mit der Methode der Trennung der Variablen. Wir nehmen an, dass $y(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Aufgabe 6 :

[4 Punkte] Welches der folgenden Richtungsfelder ist das Richtungsfeld von

$$y'(x) = \frac{\pi}{4}(y(x) - 3)(x^2 - 1)$$

