Probeprüfung 2

Aufgabe 1 :

Beantworte die folgenden Kurzaufgaben

(a) **[2 Punkte]** Bestimme den Grenzwert der Funktion

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(x)}.$$

(b) **[2 Punkte]** Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}$$

in Abhängigkeit von a

(c) **[3 Punkte]** Sei $f(x)=\sin(x^2)$ und $T_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ das Taylorpolynom am Entwicklungspunkt $x_0=0$. Bestimme die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2.

(d) **[3 Punkte]** Berechne das Integral

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+5}\,dx$$

Solution:

(a) Nach l'Hôpital gilt

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}x=1$$

(b) Nach l'Hôpital gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a(1+x)^{a-1}}{1}=a.$$

(c) Die Ableitungen von $\sin(x^2)$ sind $f'(x)=2x\cos(x^2)$ und $f''(x)=2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)$. Einsetzen des Entwicklungspunktes $x_0=0$ ergibt

$$\begin{aligned}
a_0 &= \sin(0)=0\\
a_1 &= 2\cdot 0\cdot\cos(0)=0\\
a_2 &= \frac{2\cos(0)-4\cdot 0^2\cdot\sin(0)}{2!}=1
\end{aligned}$$

Somit ist $a_0=a_1=0$ und $a_2=1$.

(d) Wir verwenden die Regel

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

und erhalten mit $f(x) = \sin(x) + 5$:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+5}\,dx = \ln|\sin(x)+5| + C$$

Aufgabe 2 :

Es sei die folgende Differentialgleichung gegeben:

$$y'(x) = -(y(x)+3)(y(x)-4)$$

(a) **[2 Punkte]** Bestimme die stationären Lösungen dieser Differentialgleichung.

(b) **[2 Punkte]** In welchem Intervall muss der Anfangswert $y(0)$ gewählt werden, sodass die gesamte Lösung $y(x)$ streng monoton steigend ist?

(c) **[4 Punkte]** Bestimme zwei Anfangswerte $y(0) = y_1$ und $y(0) = y_2$, sodass die gesamte Lösung $y(x)$ **genau einen** Wendepunkt besitzt?

Solution:

(a) Die stationären Lösungen können direkt mit $y'(x) = 0$ abgelesen werden: $y_{\infty_1} = -3$ und $y_{\infty_1} = 4$.

(b) Nur für das Intervall $]-3,4[$ gilt $y'(x) > 0$ und somit ist die Lösung dort monoton steigend. Wir wählen also $y(0) \in]-3,4[$.

(c) Wir berechnen die zweite Ableitung:

$$y''(x) = -y'(x)(y(x)-4) - (y(x)+3)y'(x) = -y'(x)(2y(x)-1)$$

Die einzige Nullstelle neben den stationären Lösungen ist also $y_w = \frac{1}{2}$. Da $y_w \in]-3,4[$ und in diesem Intervall die Lösung monoton steigend ist, muss ein Anfangswert im Intervall $]-3, \frac{1}{2}[$ gewählt werden. Beispielsweise $y_1 = 0$ und $y_2 = -2$.

Aufgabe 3 :

Es sei das Integral

$$\int \sin(x)\cos^2(x)\,dx$$

gegeben.

(a) **[3 Punkte]** Bestimme die Stammfunktion dieses Integrals.

(b) **[3 Punkte]** Gebe eine allgemeine Formel an für das Integral

$$\int f'(x)f^2(x)\,dx$$

für eine beliebige Funktion $f(x)$.

Solution:

(a) Wir substituieren $u = \cos(x)$ und erhalten mit $u' = -\sin(x)$

$$\int \sin(x)\cos^2(x)\,dx = \int \frac{1}{-\sin(x)}\sin(x)u^2\,du = -\int u^2\,du = -\frac{1}{3}u^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$$

(b) Wir substituieren $u = f(x)$ und erhalten mit $u' = f'(x)$

$$\int f'(x)f^2(x)\,dx = \int \frac{1}{f'(x)}f'(x)u^2\,du = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}f^3(x) + C$$

Die allgemeine Formel lautet also

$$\int f'(x)f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}f^3(x) + C$$

Aufgabe 4 :

Es sei die folgende Differentialgleichung gegeben:

$$y'(x) = -x^2 y(x) + e^{-\frac{1}{3}x^3}$$

(a) **[2 Punkte]** Bestimme die homogene Lösung dieser Differentialgleichung.

(b) **[3 Punkte]** Bestimme die inhomogene Lösung der Differentialgleichung.

(c) **[1 Punkt]** Bestimme die fehlende Konstante mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und gebe die gesamte Lösung an.

Solution:

(a) Die homogene Differentialgleichung ist $y'(x) = -x^2 y(x)$. Es gilt $p(x) = -x^2$ und somit

$$P(x) = \int p(x)\,dx = \int -x^2\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + C$$

Die Lösung ist also

$$y_h(x) = Ce^{-\frac{1}{3}x^3}$$

(b) Die inhomogene Differentialgleichung lässt sich mithilfe der Variation der Konstanten lösen. Es gilt also $C \to C(x)$ und wir berechnen $C(x)$ mit der Formel, welche aus der Vorlesung bekannt ist:

$$C(x) = \int e^{-P(x)} q(x)\,dx = \int e^{\frac{1}{3}x^3} e^{-\frac{1}{3}x^3}\,dx = \int 1\,dx = x + K$$

Somit ist die gesamte Lösung gegeben durch

$$y(x) = (x + K)e^{-\frac{1}{3}x^3}$$

(c) Es ist

$$y(0) = (0 + K)e^0 = K = 0$$

Somit ist die gesamte Lösung gegeben durch

$$y(x) = xe^{-\frac{1}{3}x^3}$$

Aufgabe 5 :

[8 Punkte] Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\sin(y(x))y'(x) = \cos(y(x))$$

mit der Methode der Trennung der Variablen. Wir nehmen an, dass $y(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Solution: Dies ist eine nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Wir verwenden die Schreibweise $y = y(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin(y)y' &= \cos(y) \\
\sin(y)\frac{dy}{dx} &= \cos(y) \\
\int \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\,dy &= \int 1\,dx \\
\int \tan(y)\,dy &= \int 1\,dx \\
-\ln|\cos(y)| &= x + C \\
|\cos(y)| &= e^{-(x+C)} \\
\cos(y) &= e^{-(x+C)} & \Big| \, y(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\
y &= \arccos(e^{-x+C})
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt können wir auch die Lösung zu

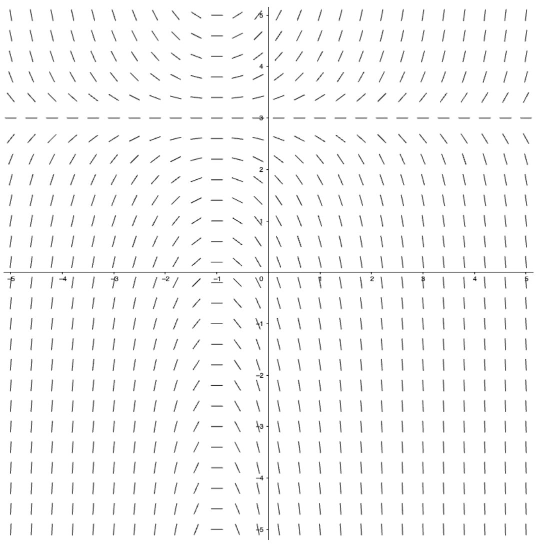
$$y(x) = \arccos(Ce^{-x})$$

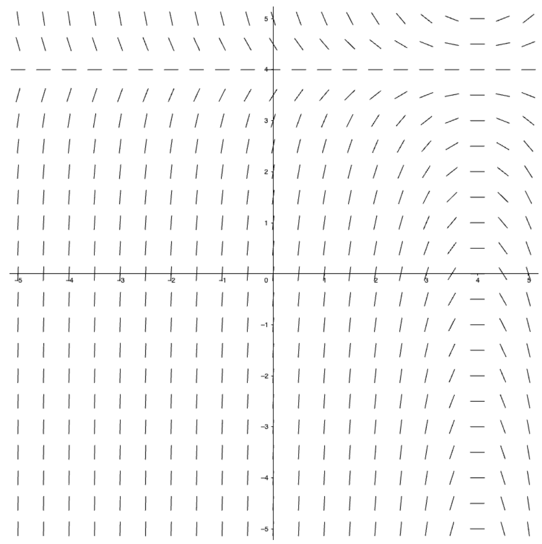
vereinfachen (nicht notwendig).

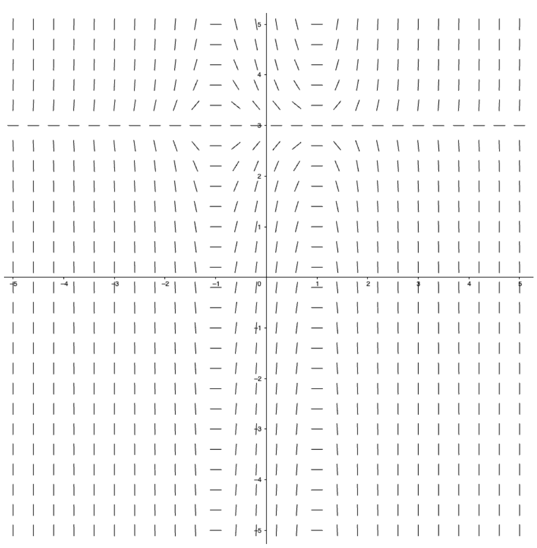
Aufgabe 6 :

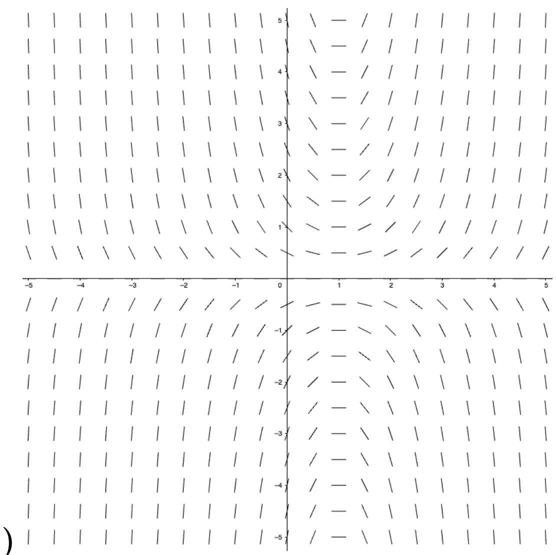
[4 Punkte] Welches der folgenden Richtungsfelder ist das Richtungsfeld von

$$y'(x) = \frac{\pi}{4}(y(x) - 3)(x^2 - 1)$$

A) 

B) 

C) 

D) 

Solution: Eine stationären Lösung der Differentialgleichung ist $y(x) = 3$. Da stationäre Lösungen waagerechte Linien im Richtungsfeld sind, können wir B) und D) ausschliessen. Ausserdem haben wir Nullstellen bei $x = \pm 1$, da für $x^2 - 1 = 0$ auch $y'(x) = 0$ gilt. Somit können wir A) aufgrund der fehlenden stationären Lösung $x = 1$ ausschliessen. Die richtige Antwort ist also **C)**.