Tag 1

Aufgabe 1 :

Beantworte die folgenden Kurzaufgaben

(a) Bestimme

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$$

(b) Berechne die Ableitung von $e^{\sqrt{x^3}}$.

(c) Bestimme die Fixpunkte der Funktion $f(x)=x(x^2+\frac{3}{4})$. Sind die Fixpunkte attraktiv?

Solution:

(a) Mit l'Hopital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}=2$$

(b) Die Ableitung kann durch Anwenden der Kettenregel und $\sqrt{x}=x^{1/2}$ berechnet werden. Wir erhalten

$$f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}e^{\sqrt{x^3}}$$

(c) Die Fixpunkte sind $x=0$ und $x=\pm\frac{1}{2}$. Es gilt $f'(x)=3x^2+\frac{3}{4}$ und somit $|f'(0)|=\frac{3}{4}<1$ und $\left|f'\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{3}{2}>1$. $x=0$ ist also der einzig attraktive Fixpunkt.

Aufgabe 2 :

Finde alle $a\in\mathbb{R}$ sodass die folgende Funktion stetig ist:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{\sin(x)} & x<0\\ 4x^2+a-1 & x\geq 0\end{cases}$$

Solution: Die beiden Teilfunktionen sind also

$$f_1(x)=\frac{x^2}{\sin(x)}$$
$$f_2(x)=4x^2+a-1$$

Der Berührungspunkt ist $x = 0$ und somit berechnen wir den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x)} = 0$$

wobei wir l'Hopital benutzt haben. Für die andere Teilfunktion erhalten wir direkt:

$$\lim_{x\to 0} 4x^2 + a - 1 = a - 1$$

Die beiden Grenzwerte müssen gleich sein, also $a = 1$.

Aufgabe 3 :

Bestimme die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 der Taylorreihe $T_2(x) = a_0 + a_1(x-3) + a_2(x-3)^2$ der Funktion

$$f(x) = \sqrt[3]{2x+2}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 3$.

Solution: Wir benötigen für diese Aufgabe folgende Ableitungen von f:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(2x+2)^{-2/3}$$
$$f''(x) = -\frac{8}{9}(2x+2)^{-5/3}$$

Einsetzen des Entwicklungspunkts ergibt:

$$a_0 = f(3) = \sqrt[3]{8} = 2$$
$$a_1 = \frac{f'(3)}{1!} = \frac{1}{6}$$
$$a_2 = \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 = -\frac{1}{72}$$

Aufgabe 4 :

Löse folgendes Integral:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$$

Solution: Im Zähler haben wir e^x. Somit sollten wir etwas substituieren, dass dieses e^x wegkürzt. Die Substitution von $u = e^{2x} + 1$ ist keine gute Substitution, da wir als Ableitung $2e^{2x}$ erhalten, und die Substitution somit das Integral nochmals etwas verkompliziert. Was geschieht, wenn wir einfach $u = e^x$ setzen? Dann erhalten wir mit $u' = e^x$ und $e^{2x} = u^2$:

$$\int \frac{1}{e^x} \frac{e^x}{u^2+1} du = \int \frac{1}{u^2+1} du.$$

Dieses Integral kennen wir aus den Standardintegralen, es gilt

$$\int \frac{1}{u^2+1} du = \arctan(u) + C$$

und mit Rücksubstitution und Grenzen:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \arctan(e^x) + C \,\Big|_{-\infty}^{0} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$