Tag 2

Aufgabe 1 :

Löse folgende Integrale mit Substitution:

(a) $\int (x-2)^3\,dx$

(b) $\int \frac{1}{7x+5}\,dx$

(c) $\int e^{3x-2}\,dx$

(d) $\int 2xe^{x^2-5}\,dx$

(e) $\int x\sin(2x^2)\,dx$

(f) $\int x^3\sqrt{x^4+1}\,dx$

(g) $\int 5x\sqrt{1-x^2}\,dx$

(h) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+16}}\,dx$

(i) $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,dx$

(j) $\int e^{\sin(x)}\cos(x)\,dx$

(k) $\int \frac{\cos(x)}{(25+10\sin(x)+\sin^2(x))}\,dx$ (schwer!)

(l) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

Solution:

(a) $\frac{1}{4}(x-2)^4+C$ (Substitution $u=x-2$)

(b) $\frac{1}{7}\ln|7x+5|+C$ (Substitution $u=7x+5$)

(c) $\frac{1}{3}e^{3x-2}+C$ (Substitution $u=3x-2$)

(d) $e^{x^2-5}+C$ (Substitution $u=x^2-5$)

(e) $-\frac{1}{4}\cos(2x^2)+C$ (Substitution $u=2x^2$)

(f) $\frac{1}{6}(x^4+1)^{\frac{3}{2}}+C$ (Substitution $u=x^4+1$)

(g) $-\frac{5\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$ (Substitution $u=1-x^2$)

(h) $\frac{\sqrt{x^4+16}}{2}+C$ (Substitution $u=x^4+16$)

(i) $\ln\left(\sin\left(x\right)+1\right)+C$ (Substitution $u=1+\sin(x)$)

(j) $e^{\sin(x)}+C$ (Substitution $u=\sin(x)$)

(k) $-\frac{1}{\sin(x)+5} + C$ (Substitution $u = \sin(x) + 5$, der Nenner kann faktorisiert werden zu $(\sin(x) + 5)^2$)

(l) $-2\cos(\sqrt{x}) + C$ (Substitution $u = \sqrt{x}$)

Aufgabe 2 :

Berechne folgendes Integral:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-x-2}$$

Solution: Es gilt $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ und somit können wir die Partialbruchzerlegung anwenden und erhalten:

$$\frac{2x+1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

Koeffizientenvergleich liefert uns

$$A = \frac{5}{3} \quad B = \frac{1}{3}$$

Die Lösung ist also

$$\int \frac{2x+1}{x^2-x-2} = \int \frac{\frac{5}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} = \frac{5}{3}\ln(x-2) + \frac{1}{3}\ln(x+1) + C$$

Aufgabe 3 :

Ist $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ der folgenden Menge enthalten?

$$M = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |\arg(z^2)| < \frac{\pi}{2}, \, \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

Solution: Die erste Bedingung kann umgeschrieben werden zu

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(z^2) < \frac{\pi}{2}$$

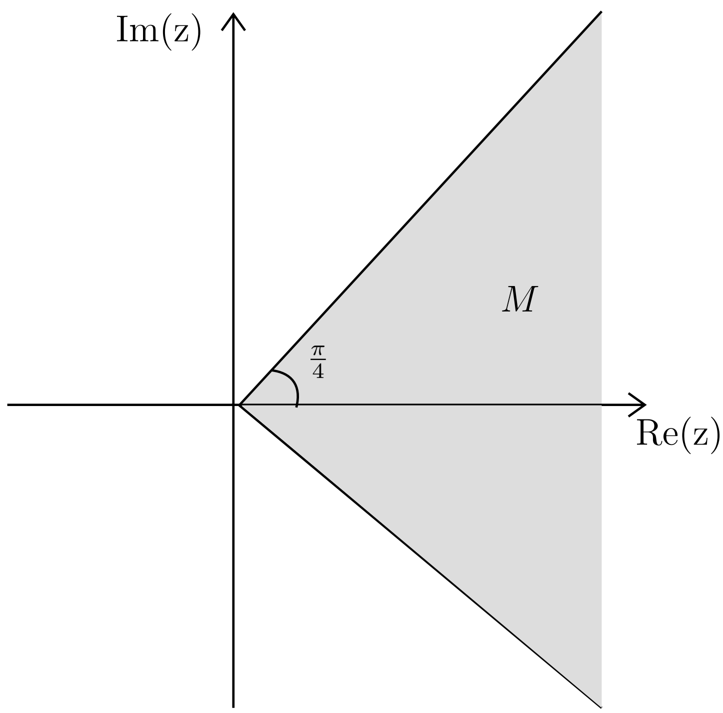
Was ist nun $\arg(z^2)$? Sei $z = re^{i\varphi}$. Dann ist $\arg(z^2)$ der Polarwinkel von $z^2 = r^2 e^{i2\varphi}$ also genau 2φ. Somit gilt

$$-\frac{\pi}{2} < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$$

und

$$-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

Zusammen mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ (also $x > 0$) erhalten wir die Menge:



Da $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{\pi}{3}i}$ und $\frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{4}$, ist z nicht in dieser komplexen Menge enthalten.

Aufgabe 4 :

Berechne alle Lösungen der Gleichung

$$z^4 = 16$$

Solution: $w = 16$ in Polarform ist

$$w = 16e^{i\cdot(0+2\pi k)} = 16e^{i\cdot 2\pi k} \quad k \in \mathbb{Z}$$

und somit

$$z = w^{1/4} = 2e^{i\frac{\pi}{2}k}$$

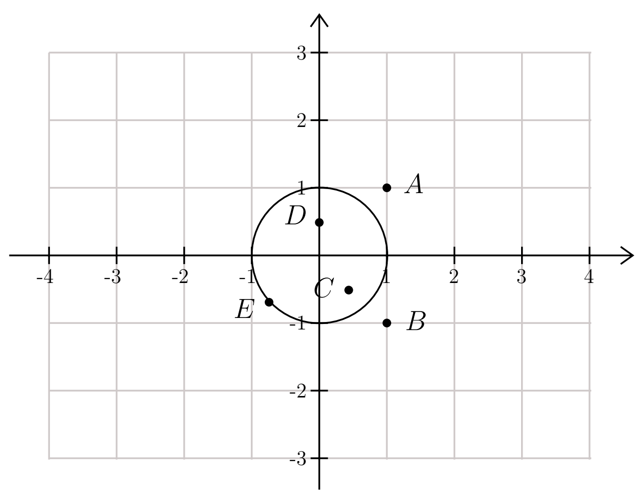
Einsetzen von $k = 0, 1, 2, 3$ ergibt

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \\ z_1 &= 2i \\ z_2 &= -2 \\ z_3 &= -2i \end{aligned}$$

Diese Aufgabe hätte sich auch grafisch lösen lassen. Denn $z = 2, -2$ sind beide bekannt. Da die Lösungen ein gleichmässiges Quadrat ergeben sollen in der Gaussebene, müssen $2i$ und $-2i$ die beiden anderen Lösungen sein.

Aufgabe 5 :

Welche dieser Punkte bildet $\bar{A}^{-2}$ ab?



Solution: Wir können dies entweder explizit berechnen:

$$A = 1 + i \implies \bar{A} = 1 - i \implies \bar{A}^{-2} = (1-i)^{-2} = \frac{1}{(1-i)^2} = \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2}i$$

oder wir sehen dies mithilfe des Ausschlussverfahrens.