Tag 3

Aufgabe 1 :

Beantworte folgende Kurzaufgaben zur DGL $y'(x) = (1 - y(x))(5 - y(x))$

(a) Bestimme die stationären Lösungen.

(b) Für welche Anfangsbedingungen $y_0 = y(0)$ ist die Lösung streng monoton fallend?

(c) Bestimme $\lim_{x\to\infty} y(x)$ für $y_0 = 3$.

(d) Für welche Anfangsbedingungen $y_0 = y(0)$ hat die Lösung **genau einen** Wendepunkt.

Solution:

(a) Die stationären Lösungen sind gegeben mit $y'(x) = 0$, also $y(x) = 1$ oder $y(x) = 5$.

(b) Für $1 < y(x) < 5$ gilt $y'(x) < 0$ und somit wählen wir die Anfangsbedingung $1 < y(0) < 5$.

(c) Mit einer Skizze der Monotonieeigenschaften in jedem Streifen erhalten wir einen Grenzwert bei $y(x) = 1$ (die stationäre Lösung $y(x) = 5$ ist abstossend).

(d) Es ist $y'(x) = y^2(x) - 6y(x) + 5$ und somit $y''(x) = 2y(x)y'(x) - 6y'(x) = y'(x)(2y(x) - 6)$. Also ist der Wendepunkt bei $y(x) = \frac{6}{2} = 3$. Dieser liegt im Streifen zwischen 1 und 5. Da dort die Lösung monoton fallend ist, müssen wir die Anfangsbedingung zwischen 3 und 5 wählen, um genau einen Wendepunkt zu haben.

Aufgabe 2 :

Untersuche die Lösbarkeit des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &= \mu \end{aligned}$$

Solution: Mit dem Gaussverfahren finden wir das System in Zeilenstufenform:

$$(A|c) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{array}\right)$$

(es kann sehr gut sein, dass man hier was anderes bekommt mit anderen Zeilenumformungen... die Argumente unten sollte man trotzdem haben (also auch die (fast) Nullzeile) Es gilt $\det(A) = 0$. Aber $\text{Rang}(A|c) = 3 \neq 2 = \text{Rang}(A)$ falls $\mu \neq 0$. Somit gibt es keine Lösungen, falls $\mu \neq 0$ ist. Sei nun $\mu = 0$. Dann können wir $x_3 = t \in \mathbb{R}$ frei wählen und erhalten unendlich viele Lösungen, explizit gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2+2t \\ 3-3t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3 :

Bestimme die restlichen Eigenwerte in $\mathbb{C}$ von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

wenn $\lambda_1 = 2 + i$ ein Eigenwert ist.

Solution: Aus dem Fundamentalsatz der Algebra muss auch:

$$\lambda_2 = 2 - i$$

ein Eigenwert sein. Die Spur der Matrix ist $\text{Spur}(A) = -1 - 3 + 9 = 5$ und damit

$$5 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = (2+i) + (2-i) + \lambda_3 = 4 + \lambda_3 \implies \lambda_3 = 1$$

der letzte Eigenwert.

Aufgabe 4 :

Löse folgende Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $y(3) = 0$

$$xy' + y = x^2 + 1$$

Solution: Die DGL umgeschrieben in unsere bekannte Form ergibt

$$y' = -\frac{1}{x}y + \frac{x^2+1}{x}.$$

Wir benützen die Variation der Konstanten:

$$P(x) = \int -\frac{1}{x}\, dx = -\ln(x)$$

und

$$\begin{aligned} C(x) &= \int e^{-(-\ln(x))}\frac{x^2+1}{x}\, dx \\ &= \int x\frac{x^2+1}{x}\, dx \\ &= \int x^2+1\, dx = \frac{1}{3}x^3 + x + K \end{aligned}$$

Einsetzen in die Lösungsformel ergibt:

$$y(x) = (\frac{1}{3}x^3 + x + K)\underbrace{e^{-\ln(x)}}_{=\frac{1}{x}} = \frac{1}{3}x^2 + 1 + \frac{K}{x}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt

$$y(3) = 3 + 1 + \frac{K}{3} \overset{!}{=} 0 \iff K = -12$$

Somit ist die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1 - \frac{12}{x}$$

Aufgabe 5 :

Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen DGL 2. Ordnung:

$$y'' = -9y$$

Solution: Die DGL lautet in unserer Form

$$y'' + 9y = 0$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

und somit $\lambda = \pm 3i$. Wir erhalten also ($\alpha = 0$, $\beta = 1$) die Lösung

$$y_h = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Aufgabe 6 :

Es sei das DGL-System $Ay = y'$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Für welches X ist

$$t \to y(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} X \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Systems mit $\lambda \in \mathbb{R}$ konstant.

(A) $X = 0$

(B) $X = 1$

(C) $X = 2$

(D) $X = 3$

Solution: Mit Einsetzen der vier möglichen Werte von X findet man, dass

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A ist und somit eine Lösung des Systems mit $\lambda = -5$.