Tag 4

Aufgabe 1 :

Bestimme alle kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3.$$

Solution: Wir haben

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 - 12y = 0 \\ f_y(x,y) &= -12x + 24y^2 = 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = 2y^2$ und Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$12y^4 - 12y = 0 \implies 12y(y^3 - 1) = 0.$$

Somit gilt entweder $y = 0$ oder $y = 1$. Da $x = 2y^2$ sind die kritischen Punkte damit

$$(x_1, y_1) = (0,0) \text{ oder } (x_2, y_2) = (2,1).$$

Aufgabe 2 :

Sei das Gebiet aus Abbildung 1 gegeben. Bestimme b sodass

$$\iint_B \frac{y}{1+x^3} dA = \frac{1}{2}\ln(b).$$

Solution: Das Gebiet ist gegeben durch

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, x \leq y \leq 2x\}$$

Wir benutzen das Gebietsintegral:

$$\iint_B \frac{y}{1+x^3} dA = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{2x} \frac{y}{1+x^3} dy dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{2}\log(1+x^3)|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log\frac{9}{8}$$

wobei wir in der vorletzten Gleichung $u = 1 + x^3$ substituiert haben. Es ist also $b = \frac{9}{8}$.

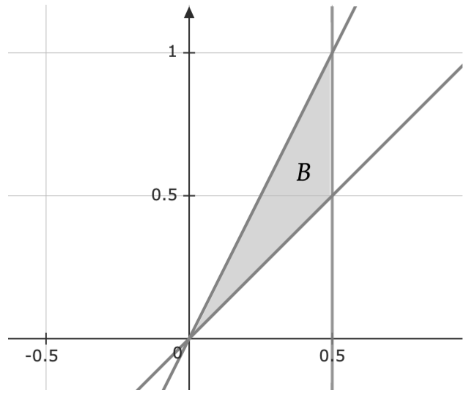


Abbildung 1: Einfaches Gebiet B.

Aufgabe 3 :

Bestimme das Potential f, sodass $K = \nabla f$ mit

$$K = \begin{pmatrix} e^{-x} - e^{x} - ye^{-x} \\ y + e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Solution: Es gilt

$$F_1 = \int e^{-x} - e^{x} - ye^{-x}\,dx = -e^{-x} - e^{x} + ye^{-x}$$
$$F_2 = \int y + e^{-x} - e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}y^2$$

und somit

$$f(x,y) = F_1 + F_2 + C = -e^{-x} - e^{x} + ye^{-x} + \frac{1}{2}y^2 + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

Aufgabe 4 :

Bestimme das die Arbeit $\oint_\gamma K \cdot d\gamma$, wobei

$$K = \begin{pmatrix} y - \sin(x) \\ -x \end{pmatrix}$$

und die Kurve γ eine Dreiecksform hat. Sie verläuft zuerst entlang der Geraden von $(0,0)$ nach $(\pi/2, 0)$, danach entlang der Geraden von $(\pi/2, 0)$ nach $(\pi/2, 1)$ und von dort zurück nach $(0,0)$.

Solution: Mit der Formel von Green gilt

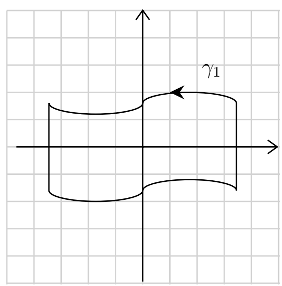
$$\oint_\gamma K \cdot d\gamma = \iint_{\text{Dreieck}} (-1-1) dA = -2A_{\text{Dreieck}} = -\frac{\pi}{2}.$$

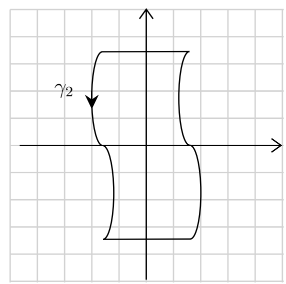
Aufgabe 5 :

Sei

$$K = \begin{pmatrix} 2x + bxy \\ -y^2 + x \end{pmatrix}$$

und seien γ_1 und γ_2 wie folgt gegeben:





Die Kurve γ_2 entspricht der 90° Drehung der Kurve γ_1. Bestimme b, sodass der Fluss $\oint_\gamma K \cdot n\, ds$ durch beide Kurven γ_1 und γ_2 gleich ist.

Solution: Wir bemerken, dass die Flächen, welche die Kurven umschliessen, gleich gross sind. Da die Flussintegrale mit dem Satz von Gauss

$$\oint_\gamma K \cdot n\, ds = \iint_B \operatorname{div}(K)\, ds$$

ergeben, brauchen wir $\operatorname{div}(K) = \mathit{const}.$ damit die Integrale ein Vielfaches der Fläche ergeben. Es ist

$$\operatorname{div}(K) = 2 + by - 2y = 2 + y(b-2).$$

Damit die Divergenz konstant ist, muss also $b = 2$ gewählt werden.