Tipps Serie 11

Hrvoje Krizic
hkrizic@ethz.ch

MC-Aufgaben diese Woche: ♡

Ich würde euch diese Woche empfehlen, vor allem die Zeit für die MC-Aufgaben aufzuwenden. Dann ist nun ein guter Zeitpunkt, den Stoff, welchen wir bis jetzt hatten nochmals etwas zu repetieren diese Woche, damit ihr in der Lernphase die Mathematik wirklich auch mit gutem Gewissen zur Seite stellen könnt. Erst falls dies getan ist, würde ich die Handaufgaben lösen. Die gesamte Serie kann mit Taschenrechner (TR) gelöst werden.

Aufgabe 1

(a) (ZE = Zeiteinheiten). Die Gleichungen werden von der Form

$$\begin{aligned} j_{n+1} &= \alpha a_n \\ a_{n+1} &= \beta a_n + \gamma j_n \end{aligned}$$

α, β und γ sind jeweils entweder p, r oder q. Ordne die richtige Variable zu.

(b) Schreibe

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und Matrix-Vektormultipliziere Av_n wobei $v_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$ Vergleiche mit deinen Gleichungen. Was sind a, b, c und d?

(c) Bestimme j_n und a_n mit Taschenrechner am besten. Zeichne statt den Vektor die Gerade $f(x) = \frac{1}{2.6}x$ (diese wird durch die Richtung des Vektors definiert).

Aufgabe 2

(a) Die Fibonaccifolge ist definiert als $N_{n+1} = N_n + N_{n-1}$.

(b) Die Steigung der Gerade m welche durch den Vektor bestimmt ist, ist immer gegeben durch

$$m = \frac{\textit{y-Komponente vom Vektor}}{\textit{x-Komponente vom Vektor}} = \frac{N_n}{N_{n+1}}$$

Für hohe n nähert sich die Steigung von v_n einem Wert an. Um auch ohne JNB weiterarbeiten zu können: du solltest den Wert $m = 0.618$ erhalten.

(c) Wenn $\frac{N_{n+1}}{N_n} \approx \lambda$ gilt, dann folgt daraus $N_{n+1} = \lambda N_n$ für grosse n. Setze dies in v_n so ein.

(d) Wir möchten $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{N_{n+1}}{N_n}$ bestimmen. Gehe wie folgt vor:

1. Ersetze N_{n+1} durch $N_n + N_{n-1}$.
2. Du kannst nun den ganzen Ausdruck zum Ausdruck

$$1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{N_{n-1}}}$$

   führen.
3. Ersetze nun wieder $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{N_{n-1}}$ durch λ. Du erhältst die Gleichung

$$\lambda = 1 + \frac{1}{\lambda}$$

   welche du nun nach λ auflösen kannst. Nehme nur die positive Nullstelle.

(e) Wenn wir Vektoren **normieren**, dann möchten wir zwar die Richung gleich lassen, aber den Betrag ändern, sodass dieser genau $= 1$ ist. Dazu rechnen wir durch die Norm des Vektors. Zusammengefasst:

$$\vec{v} \overbrace{\Longrightarrow}^{\text{normieren}} \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$$

wobei $\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt. Wie lautet $\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ normiert. Wieso?

(f) -

Aufgabe 3

(a) -

(b) Bestimme v_∞ mit dem JNB. Damit du ohne JNB weiterrechnen kannst, gebe ich hier das Resultat an:

$$v_\infty = \begin{pmatrix} -0.4472... \\ 0.8944... \end{pmatrix}$$

(c) Berechne $\frac{1}{3}Av_\infty$ und vergleiche dein Resultat mit v_∞.
Für Interessierte: Die Gleichung $Av = \lambda v$ eine Eigenwertsgleichung, wobei λ Eigenwert genannt wird und v der Eigenvektor. Was ist hier der Eigenwert, was der Eigenvektor?