Tipps Serie 12

Hrvoje Krizic
hkrizic@ethz.ch

Aufgabe 1 ♡

Eine gute Übung um Matrix-Matrix-Multiplikation zu üben. Es gibt insgesamt theoretisch 6 Möglichkeiten, jedoch können wir 3 davon gar nicht berechnen, da die Dimensionen nicht stimmen.

Aufgabe 2 (♡)

Für HST-Studierende eine gute und interessante Übung, da dies ein Konzept aus Mathematik III ist (das Verfahren wird "Diagonalisierung" genannt).

(a) Zeige für beide Spaltenvektoren $Av_i = \lambda_i v_i$ für je ein $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

(b) Berechne TS und ST explizit um dies zu zeigen. $T^{-1} = S$ folgt dann direkt aus der Definition von der Inversen: $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$.

(c) Berechne $D = T^{-1}AT = SAT$ explizit. D ist eine besondere Art von quadratischen Matrizen. Vergleiche auch mit den Eigenwerten aus a).

(d)* (eher schwere Aufgabe ohne Tipps) Es gilt $D = T^{-1}AT$. Multipliziere von rechts mit T^{-1} und von links mit T beide Seiten. Du sollst zeigen, dass $A = TDT^{-1}$ gilt. Es gilt

$$A^{99} = \underbrace{\underbrace{TDT^{-1}}_{A}\underbrace{TDT^{-1}}_{A}\underbrace{TDT^{-1}}_{A}\ldots\underbrace{TDT^{-1}}_{A}}_{99 \text{ Mal}}.$$

Vereinfache indem du $TT^{-1} = E_2$ setzt. Was ist D^{99}? Berechne zuerst D^2, dann D^3... was fällt dir auf?

Aufgabe 3

(a) Serie 11, Aufgabe 2 (c) haben wir gesehen, dass für grosse n die Gleichung $N_{n+1} \approx \lambda N_n$ gilt.

(b) Für die erste Art siehe wieder Serie 11 Aufgabe 2 für den Eigenwert. Um die Eigenwerte und Eigenvektoren explizit zu berechnen (zweite Art), musst du das Gleichungssystem $Av = \lambda v$ lösen, mit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Du erhältst dann das Gleichungssystem:

$$Av = \lambda v \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

Setze die untere Gleichung in die obere ein und erhalte λ.

(c) Wir haben in der Übungsstunde gesehen, dass es unendlich viele Eigenvektoren gibt für einen Eigenwert (sie unterscheiden sich aber nur durch eine Streckung). Setze λ in das Gleichungssystem ein und löse beide Gleichungen nach x auf. Du kannst nun $y = t \in \mathbb{R}$ (frei wählbarer Parameter) setzen (wir werden dies noch im zweiten Semester viel machen, dies ist etwas ungewohnt zu Beginn). Dann erhältst du als Lösung die Form $t \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

(d) Da sowohl v_∞ als auch $\hat{v}$ Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert sind (wie du zuerst überprüfen solltest), muss also $\hat{v} = \alpha v_\infty$ gelten (da sich Eigenvektoren zum selben Eigenwert nur durch ein Skalar unterscheiden). Nun kannst du $\frac{\hat{v}}{|\hat{v}|}$ in Abhängigkeit von v_∞ berechnen (α wird sich wegkürzen). Was ist $|v_\infty|$?

Aufgabe 4 ♡

(a) -

(b)
   i. Berechne Av und setze es gleich λv. Aus der mittleren Komponente erhältst du direkt λ und die beiden anderen Komponenten sollten nicht schwer sein herauszufinden.

   ii. Berechne A^2, A^3,... bis du auf $A^k = E_3$ stösst. Falls beispielsweise $k = 5$ wäre, dann kannst du die Gleichung zu $v_{17} = A^{17} v_0 = A^2 A^{15} v_0 = A^2 v_0$ vereinfachen.

(c) v_0 ist ein Eigenvektor von A. Zu welchem Eigenwert? Gehe vor wie in der Übungsstunde.