Tag 1

Aufgabe 1 :

Im Folgenden gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Finde die Eigenwerte von A.

(b) Finde die dazugehörigen Eigenvektoren.

(c) Diagonalisiere die Matrix A.

(d) Berechne A^8.

(e) Berechne e^A.

Solution:

(a) Wir berechnen und setzen:

$$\det(A - \lambda E_2) = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$$

Es gilt also $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$.

(b) Wir finden zunächst einen passenden Eigenvektor zu λ_1 :

$$A_1^* = A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Wir finden die Lösungen von $A_1^* v_1 = 0$ und erhalten den Eigenvektor

$$v_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir wählen $t = 1$ und erhalten:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir wiederholen diesen Prozess für $\lambda_2 = -2$ und erhalten den Eigenvektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Man beachte hierbei, dass es unendlich viele Lösungen. Denn jedes Vielfache von diesem Vektor ist eine Lösung.

(c) Wir erhalten

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen noch T^{-1} mit unsere Formel und erhalten:

$$T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Unsere Diagonalisierung ist dann

$$A = TDT^{-1}$$

(d) Es gilt

$$A^8 = TD^8T^{-1}$$

wobei

$$D^8 = \begin{pmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 2^8 \end{pmatrix} = 2^8 E_2$$

und somit

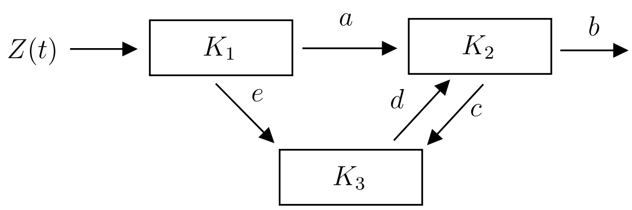
$$\begin{aligned} A^8 &= TD^8T^{-1} \\ &= T \cdot 2^8 E_2 \cdot T^{-1} \\ &= 2^8 TT^{-1} \\ &= 2^8 E_2 \\ &= \begin{pmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 256 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(e) Es ist

$$e^A = Te^DT^{-1} = T \cdot \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix} T^{-1} = \frac{1}{4 \cdot e^2} \begin{pmatrix} 3e^4 + 1 & -e^4 + 1 \\ -3e^4 + 3 & e^4 + 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 :

Bestimme für das folgende Kompartimentsmodell die Matrix A und $g(t)$ für das zugehörige DGL-System $y'(t) = Ay(t) + g(t)$:



Solution: Es ist

$$A = \begin{pmatrix} -(a+e) & 0 & 0 \\ a & -(b+c) & d \\ e & c & -d \end{pmatrix}$$

und

$$g(t) = \begin{pmatrix} Z(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 :

Sei das DGL-System $y'(t) = Ay(t)$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimme die Matrix e^{tA}

(b) Was ist die Lösung $y(t)$ für die Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Solution:

(a) A ist eine Jordannormalform mit zwei Jordanblöcken der Länge 2 und 1:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

Es gilt offensichtlich $e^{tJ_2} = e^{2t}$ und aus der Vorlesung ist bekannt:

$$e^{tJ_1} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Somit ist die Lösung gegeben durch

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

(b) Die Lösung ist durch $y(t) = e^{At}y(0)$ gegeben, wobei wir e^{At} aus (a) kennen. Die Lösung ist demnach:

$$y(t) = \cdot \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} e^t(3+t) \\ e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 :

Betrachte die 3. Ordnung DGL

$$x^{(3)} - 4x^{(2)} + 5x' - 2x = 0.$$

(a) Bestimme die allgemeine Lösung der DGL.

(b) Schreibe die DGL in die Form $y' = Ay$ um, mit $y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}$.

Solution:

(a) Wir bestimmen zuerst das charakteristische Polynom der DGL:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Die Nullstellen sind also $\lambda_{1,2} = 1$ mit doppelter Vielfachheit und $\lambda_3 = 2$ mit einfacher Vielfachheit. Das Fundamentalsystem der DGL ist also gegeben durch $\{e^t, te^t, e^{2t}\}$ und die allgemeine Lösung somit durch

$$x(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{2t}.$$

(b) Wenn wir $y(t)$ so wie in der Aufgabe definieren, so können wir A von $y' = Ay$ direkt nach der allgemeinen Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

hinschreiben. Das heisst mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

gilt $y' = Ay$.