Tag 2

Aufgabe 1 :

Sei

$$f(x) = A, \quad x \in [0, \pi)$$

wobei A eine Konstante ($A \in \mathbb{R}$) ist.

(a) Setze die Funktion so fort, dass sie 2π-periodisch und ungerade wird.

(b) Berechne die reelle Fourierreihe der 2π-periodisch fortgesetzen Funktion.

(c) Berechne die komplexen Fourierkoeffizienten.

Solution:

(a) Die ungerade 2π-periodische Fortsetzung ist

$$f(x) = \begin{cases} A & x \in [0, \pi) \\ -A & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

(b) Es ist $a_k = 0$ da die Funktion ungerade ist. Wir berechnen nun b_k:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} A \sin(kx)\, dx \\ &= \frac{2(A - A\cos(k\pi))}{\pi k} \\ &= \frac{2A(1 - (-1)^k)}{\pi k} \end{aligned}$$

Wir können das Resultat so stehen lassen oder noch eine Fallunterscheidung durchführen:

$$\frac{2A(1 - (-1)^k)}{\pi k} = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{4A}{\pi k} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Fourierreihe ist dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A(1 - (-1)^k)}{\pi k} \sin(kx)$$

oder

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4A}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x)$$

(c) Die komplexen Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases}$$

also

$$c_k = \begin{cases} \frac{-iA(1-(-1)^k)}{\pi k} & k > 0 \\ 0 & k = 0 \\ \frac{-iA(1-(-1)^k)}{\pi k} & k < 0 \end{cases}$$

beziehungsweise

$$c_k = \frac{-iA(1-(-1)^k)}{\pi k}, \quad \forall k \neq 0.$$

Aufgabe 2 :

Berechne die Laplace Transformierten der folgenden Funktionen:

(a) $f(t) = 3\sin(t-2)\Theta(t-2) + e^{-7t}$

(b) $g(t) = e^{-3t}(2t)^3 + 5\cos(t-4)\Theta(t-4)$

(c) $h(t) = t3^{2t}$.
Hinweis: Es gilt $3^{2t} = e^{2\ln(3)t}$.

(d) $k(t) = \sin^2(t)$.
Hinweis: Benutze $\frac{d}{dt}\sin^2(t) = 2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$.

Solution:

(a) Wir verwende zuerst die Linearität:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = 3\mathcal{L}(\sin(t-2)\Theta(t-2))(s) + \mathcal{L}(e^{-7t})(s).$$

Dann benutzen wir für den ersten Term die Verschiebung nach rechts:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = 3e^{-2s}\mathcal{L}(\sin(t))(s) + \mathcal{L}(e^{-7t})(s).$$

Der Rest sind nur noch bekannte Transformationen aus der Tabelle:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = 3e^{-2s}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s+7}.$$

(b) Wir verwenden wieder zuerst die Linearität, wobei wir im ersten Term $(2t)^3 = 8t^3$ bemerken:

$$\mathcal{L}(g(t))(s) = 8\mathcal{L}(e^{-3t}t^3)(s) + 5\mathcal{L}(\cos(t-4)\Theta(t-4))(s).$$

Im ersten Term benutzen wir den Dämpfungssatz, im zweiten den Verschiebungssatz nach rechts:

$$\mathcal{L}(g(t))(s) = 8\mathcal{L}(t^3)(s+3) + 5e^{-4s}\mathcal{L}(\cos(t))(s).$$

Im ersten Term benutzen wir die bekannte Transformation $\mathcal{L}(t^3)(s) = \frac{6}{s^4}$ und ersetzen s durch $s+3$, im zweiten Term steht nur noch eine bekannte Transformation aus der Tabelle:

$$\mathcal{L}(g(t))(s) = 8\frac{6}{(s+3)^4} + 5e^{-4s}\frac{s}{s^2+1} = \frac{48}{(s+3)^4} + \frac{5se^{-4s}}{s^2+1}.$$

(c) Wir folgen dem Hint und schreiben $h(t)$ um zu

$$h(t) = t3^{2t} = te^{2\ln(3)t}$$

und wenden die Laplace Transformation an:

$$\mathcal{L}(h(t))(s) = \mathcal{L}(te^{2\ln(3)t})(s).$$

Da wir einen Term mit der Exponentialfunktion haben, wenden wir den Dämpfungssatz an:

$$\mathcal{L}(h(t))(s) = \mathcal{L}(t)(s - 2\ln(3)).$$

Wir können nun die bekannte Transformation $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$ benutzen und erhalten:

$$\mathcal{L}(h(t))(s) = \frac{1}{(s-2\ln(3))^2}.$$

(d) Wir berechnen die Laplace Transformierte von $\frac{d}{dt}\sin^2(t)$ mit dem Hinweis:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\sin^2(t)\right)(s) = \mathcal{L}(\sin(2t))(s) = \frac{2}{s^2+4},$$

wobei wir die bekannte Transformation von $\sin(at)$ benutzt haben. Wir können ausserdem den Ableitungssatz im Originalbereich auf die Transformation von $\frac{d}{dt}\sin^2(t)$ anwenden:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\sin^2(t)\right)(s) = s\mathcal{L}(\sin^2(t))(s) - \sin^2(0) = s\mathcal{L}(\sin^2(t))(s),$$

wobei wir $\sin^2(0) = 0$ verwendet haben. Indem wir die beiden Rechnung zusammenfügen, bekommen wir:

$$\begin{aligned} \frac{2}{s^2+4} &= s\mathcal{L}(\sin^2(t))(s) \\ \implies \mathcal{L}(\sin^2(t))(s) &= \frac{2}{s(s^2+4)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 :

Berechne die Laplace Rücktransformationen der folgenden Funktionen.
Hint: Eine Teilaufgabe kann mit dem Faltungssatz, eine mit der PBZ und eine mit den blossen Rechenregeln rücktransformiert werden.

(a) $\frac{s^2+1}{s^2(s+1)}$

(b) $\frac{s}{(s^2+1)^2}$
Hinweis: Benutze $\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))$.

(c) $\frac{e^{-4s}}{s^2}$

Solution:

(a) Hier haben wir eine relativ komplexe gebrochenrationale Funktion, d.h. wir wenden PBZ an. Der Nenner ist schon faktorisiert. Als Summe der Partialbrüche erhalten wir:

$$\frac{s^2+1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}.$$

Indem wir die Gleichung mit $s^2(s+1)$ multiplizieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} s^2+1 &= As(s+1) + B(s+1) + Cs^2 \\ &= s^2(A+C) + s(A+B) + B. \end{aligned}$$

Mit Koeffizientenvergleich finden wir also:

$$(A+C) = 1, \qquad (A+B) = 0, \qquad B = 1,$$

und somit $A = -1, B = 1, C = 2$, also:

$$\begin{aligned} \frac{s^2+1}{s^2(s+1)} &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + 2\frac{1}{s+1} \\ &= -\mathcal{L}(1)(s) + \mathcal{L}(t)(s) + 2\mathcal{L}(e^{-t})(s) \qquad = \mathcal{L}(-1+t+2e^{-t})(s), \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile nur aus der Tabelle bekannte Trafos verwendet haben. Daraus folgt also $-1+t+2e^{-t}$ für die Rücktransformation.

(b) Wir verwenden hier den Faltungssatz, da die Funktion ein Produkt zweier aus der Tabelle bekannter Transformationen ist:

$$\frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}(\cos(t))(s) \cdot \mathcal{L}(\sin(t))(s).$$

Mit dem Faltungssatz folgt also für $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$

$$\frac{s}{(s^2+1)^2} = \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}(f * g)(s)$$

und somit ist $(f * g)(t)$ die Rücktransformation. Nun müssen wir noch das Faltungsintegral ausrechnen:

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) = \int_0^t \cos(u)\sin(t-u)\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \sin(t) - \sin(2u-t)\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \sin(t)\,du - \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2u-t)\,du \\
&= \frac{1}{2}t\sin(t) + \left[\frac{1}{4}\cos(2u-t)\right]_0^t \\
&= \frac{1}{2}t\sin(t)
\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile $\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))$ verwendet haben.

(c) Hier haben wir weder ein offensichtliches Produkt bekannter Transformationen, noch eine gebrochenrationale Funktion. Stattdessen haben wir ein Term e^{-4s}, der im Verschiebungssatz nach rechts auftaucht. Den wenden wir nun rückwärtsän. Um den anwenden zu können, bemerken wir zuerst die bekannte Transformation $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$:

$$\frac{e^{-4s}}{s^2} = e^{-4s} \cdot \frac{1}{s^2} = e^{-4s}\mathcal{L}(t)(s).$$

Jetzt können wir den Verschiebungssatz anwenden:

$$e^{-4s}\mathcal{L}(t)(s) = \mathcal{L}((t-4)\Theta(t-4))(s).$$

Das heisst, wir haben als Rücktransformation $(t-4)\Theta(t-4)$ gefunden.