Tag 3

Aufgabe 1 :

Berechne die Lösung der folgenden Integral-Differentialgleichung:

$$x'(t) + \int_0^t x(t-u)\,du = \cos(t), \qquad x(0) = 0$$

Gehe dabei wie folgt vor:

(a) Zeige, dass die Laplace Transformierte der Lösung durch $\mathcal{L}(x(t))(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$ gegeben ist.

(b) Löse das Problem durch Rücktransformation.
Hinweis: Benutze $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

Solution:

(a) Wir gehen wie im Rezept zu den Integral-Differentialgleichungen von und identifizieren das Integral als eine Faltung. In diesem Fall steht im Integral nur der Term $x(t-u)$, der genau dem $g(t-u)$ entspricht, also $g(t) = x(t)$. Da kein Term mit nur u als Argument vorkommt, haben wir einfach $f(t) = 1$, da dann auch $f(u) = 1$. Mit diesen Funktionen können wir die Gleichung umschreiben zu:

$$x'(t) + (f * g)(t) = \cos(t).$$

Nun wenden wir auf beide Seiten die Laplace Transformation an und benutzen Linearität, sowie den Faltungssatz:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(x'(t))(s) + \mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(\cos(t)) \\ \implies\ &\mathcal{L}(x'(t))(s) + \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}(\cos(t)). \end{aligned}$$

Nun benutzen wir den Ableitungssatz im Originalbereich und die Anfangsbedingung:

$$\mathcal{L}(x'(t))(s) = s\mathcal{L}(x(t))(s) - x(0) = s\mathcal{L}(x(t))(s).$$

Wir setzen das in die Gleichung ein, sowie $f(t) = 1, g(t) = x(t)$ und berechnen die vorkommenden bekannten Laplace Transformationen, und formen nach $\mathcal{L}(x(t))(s)$ um:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}(x(t))(s) + \mathcal{L}(1)(s) \cdot \mathcal{L}(x(t))(s) &= \mathcal{L}(\cos(t)) \\ \implies\ s\mathcal{L}(x(t))(s) + \frac{1}{s}\mathcal{L}(x(t))(s) &= \frac{s}{s^2+1} \\ \implies\ \mathcal{L}(x(t))(s)\left(s + \frac{1}{s}\right) &= \frac{s}{s^2+1} \\ \implies\ \mathcal{L}(x(t))(s) &= \frac{s^2}{(s^2+1)^2}. \end{aligned}$$

(b) Für die Rücktransformation bemerken wir, dass die Funktion ein Produkt zweier bekannter Transformationen ist:

$$\frac{s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}(\cos(t))(s) \cdot \mathcal{L}(\cos(t))(s).$$

Mit $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \cos(t)$ und dem Faltungssatz haben wir also

$$= \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}(f * g)(s),$$

und $(f*g)(t)$ ist die gesuchte Rücktransformation. Nun müssen wir nur noch die Faltung explizit ausrechnen und benutzen dafür den Hinweis:

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_0^t \cos(u)\cos(t-u)\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \cos(t) + \cos(2u-t)\,du \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos(t)\int_0^t du + \int_0^t \cos(2u-t)\,du\right] \\
&= \frac{1}{2}t\cos(t) + \frac{1}{4}(\sin(t) - \sin(-t)) \\
&= \frac{1}{2}t\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t),
\end{aligned}$$

wobei wir in der zweitletzten Zeile $\sin(-t) = -\sin(t)$ verwendet haben.

Aufgabe 2 :

Gesucht wird eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) - 4u_t(x,t) - 3u(x,t) = 0 & \\ u(x,0) = x(x^2-\pi^2) & x \in [0,\pi] \text{ (AB)} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{(RB)} \end{cases}$$

Gehe dazu folgendermassen vor:

(a) Führe einen Seperationsansatz $u(x,t) = f(x)g(t)$ durch und erhalte zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

(b) Löse beide Differentialgleichungen mit den Randbedingungen (RB).

(c) Finde eine Basislösung $u_n(x,t)$.

(d) Entwickle die Anfangsbedingung $h(x) := x(x^2-\pi^2)$ auf $[-\pi,\pi]$ in eine Fourierreihe. Musst du sie ungerade oder gerade fortsetzen?
Hinweis: Du darfst die folgenden zwei Integrale verwenden:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{-2\pi\cos(n\pi)}{n} \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} x^3\sin(nx)\,dx = \frac{-2\pi(\pi^2n^2-6)\cos(n\pi)}{n^3}$$

(e) Mache den Superpoisitonsansatz $u(x,t) = \sum u_n(x,t)$ mit den u_n aus c) und finde so eine Lösung zum Anfangsrandwertproblem.

Solution:

(a) Mit dem Separationsansatz $u(x,t) = f(x)g(t)$ erhalten wir

$$f''(x)g(t) - 4f(x)g'(t) - 3f(x)g(t) = 0$$

also

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = 4\frac{g'(t)}{g(t)} + 3 = -w^2$$

Wir haben $w > 0$, da so erst eine periodische Funktion in x entstehen kann.

(b) Für $f(x)$ erhalten wir

$$f(x) = a\cos(wx) + b\sin(wx)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Randbedingung ist $f(0) = f(\pi) = 0$, also

$$f(0) = a\cos(0) + b\sin(0) = 0 \implies a = 0$$
$$f(\pi) = b\sin(w\pi) = 0 \implies w = n \in \mathbb{N}$$

und somit $f(x) = b\sin(nx)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Weiter erhalten wir für $g(t)$ die Lösung

$$g(t) = Ce^{-\frac{3+w^2}{4}t} \overset{w=n\in\mathbb{N}}{=} Ce^{-\frac{3+n^2}{4}t}$$

(c) Die Basislösung ist

$$u_n x, t = f(x)g(t) = k_n e^{-\frac{3-k}{4}t}\sin(nx)$$

wobei wir die beiden Konstanten zu einer (k_n) zusammengeführt haben.

(d) Die Funktion muss ungerade fortgesetzt werden, da wir nur $\sin(x)$-Terme haben. Da aber die Funktion sowieso schon ungerade ist, können wir einfach die Fourierreihe für die Funktion zwischen $[-\pi, \pi]$ berechnen. Wir erhalten $a_k = 0$ und

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(x^2 - \pi^2)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\sin(nx)\,dx - \pi\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{-2(\pi^2n^2 - 6)(-1)^n}{n^3} + \frac{2\pi^2(-1)^n}{n} \\
&= (-1)^n\frac{12 - 2\pi^2n^2 + 2\pi^2n^2}{n^3} \\
&= \frac{12(-1)^n}{n^3}
\end{aligned}$$

wobei wir $\cos(n\pi) = (-1)^n$ genutzt haben. Einsetzen der Koeffizienten in die Fourierreihe ergibt:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^3} \sin(nx).$$

(e) Da die Gleichung **linear und homogen** ist, ist der Superpositionsansatz zulässig. Wir setzen also unter Verwendung unserer Basislösung die Lösung an als

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n e^{-\frac{3-k}{4}t} \sin(nx)$$

Wir wollen nun geeignete Koeffizienten k_n bestimmen, damit die Anfangsbedingung (AB) erfüllt wird. Dazu setzen wir die AB ein und vergleichen mit der Fourierreihe dieser:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt direkt

$$k_n = \frac{12(-1)^n}{n^3}$$

und somit ist die gesamte Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^3} e^{-\frac{3-k}{4}t} \sin(nx)$$

Bitte umblättern!

Aufgabe 3 :

Wir möchten in dieser Aufgabe die Schwingung einer gezupften Saite näher anschauen. Diese soll durch die Funktion $u(x,t)$ beschrieben werden und folgt der PDE $u_{tt} = u_{xx}$. Wenn wir die Seite anzupfen, ist sie wie folgt angespannt:

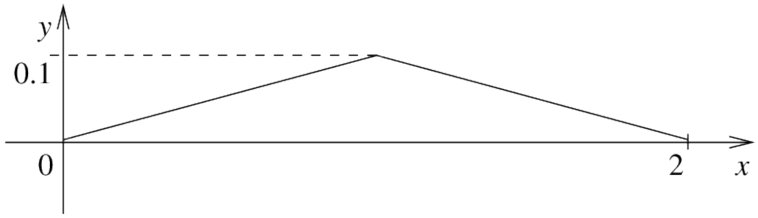

Abbildung 1: Die Seite wird gezupft ($f(x)$: Anfangsbedingung)

Die Funktion ist also

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & x \in [0,1] \\ \frac{1}{10}(2-x) & x \in (1,2] \end{cases}$$

Da die Funktion zunächst ruht, gilt $u_t(x,0) = 0$. Wir fassen die PDE zusammen:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \\ u(0,t) &= u(2,t) = 0 && (RB) \\ u_t(x,0) &= 0 && (RB) \\ u(x,0) &= f(x) && (AB) \end{aligned}$$

(a) Führe einen Seperationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ durch und erhalte zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

(b) Löse beide Differentialgleichungen mit den Randbedingungen (RB).

(c) Finde eine Basislösung $u_n(x,t)$.

(d) Superpositioniere die Basislösung und bestimme die fehlenden Koeffizienten mithilfe der Anfangsbedingung.
Hinweis: Setze die Funktion $f(x)$ zunächst zu einer 4-periodischen ungeraden Funktion fort und berechne ihre Fourier-Reihe. Begründe, wieso du dies machst.

Solution:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} T''(t)X(x) &= T(t)X''(x) \\ \frac{T''(t)}{T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -w^2 \end{aligned}$$

wobei $w > 0$, da $X(x)$ periodisch sein muss. Damit erhalten wir die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T''(t) = -w^2 T(t)$$
$$X''(x) = -w^2 X(x)$$

(b) Wir lösen mithilfe der bekannten Methoden:

$$T(t) = A\sin(wt) + B\cos(wt)$$
$$X(x) = C\sin(wx) + D\cos(wx)$$

Wir setzen nun die Randbedingung ein und erhalten

$$X(0) = D = 0$$
$$X(2) = C\sin(2w) = 0 \implies w = \frac{n\pi}{2}$$

und die Funktion ist 4-periodisch, wobei $n \in \mathbb{N}$. Die zweite Randbedingung kann nun eingesetzt werden und wir erhalten

$$T'(t) = nA\cos(wt) - nB\sin(wt)$$
$$T'(0) = wA = 0 \implies A = 0$$

Wir erhalten also zusammnegefasst

$$T(t) = B\cos(\frac{n\pi}{2}t)$$
$$X(x) = C\sin(\frac{n\pi}{2}x)$$

(c) Die Basislösung ist gegeben durch

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = A_n \sin(\frac{n\pi}{2}x)\cos(\frac{n\pi}{2}t)$$

wobei wir B und D zu einer Konstanten A_n zusammengeführt haben.

(d) Die Superposition der Basislösungen ergibt die allgmeine Lösung (aufgrund der Linearität und Homogenität)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{2}x)\cos(\frac{n\pi}{2}t)$$

Die Anfangsbedingung ergibt:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{2}x) \overset{!}{=} f(x)$$

Wir müssen unsere Funktion also zu einer 4−periodischen ungeraden Funktion fortsetzen, da wir nur Sinus-Terme übrig haben und die Funktion wegen der ersten Randbedingung automatisch 4-periodisch ist (siehe b)). Wir erhalten:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0,2] \\ -f(x) & x \in [-2,0] \end{cases}$$

Wir möchten nun die Fourierkoeffizienten bestimmen und rechnen:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \tilde{f}(x)\sin(\frac{n\pi}{2}x)\,dx \\ &= \int_0^2 f(x)\sin(\frac{n\pi}{2}x)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{10}x\sin(\frac{n\pi}{2}x)\,dx + \int_1^2 \frac{1}{10}(2-x)\sin(\frac{n\pi}{2}x)\,dx \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \pi n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{5\pi^2 n^2} - \frac{2\sin(\pi n) - 2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \pi n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{5\pi^2 n^2} \\ &= \frac{4\sin(\frac{\pi n}{2})}{5\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir also die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5\pi^2 n^2}\sin(\frac{\pi n}{2})\sin(\frac{n\pi}{2}x)\cos(\frac{n\pi}{2}t).$$

Aufgabe 4 :

Wir betrachten folgende Laplace gleichung, wobei

$$B_1(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R} \,\big|\, x^2+y^2 < 1\}, \quad \partial B_1(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R} \,\big|\, x^2+y^2 = 1\}$$

gilt:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in B_1(0) \\ u(x,y) = x^2 & (x,y) \in \partial B_1(0) \end{cases}$$

(a) Bestimme das Maximum von $u(x,y)$.

(b) Bestimme $u(0,0)$.

Solution:

(a) Es gilt das Maximumsprinzip ($u(x,y)$ ist eine harmonische Funktion) und somit ist das Maximum der Randbedingung auch das Maximum der Funktion. Wir setzen $x = \cos^2(\varphi)$ auf dem Rand und erhalten somit

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} u(x,y) = \max_{\varphi\in[0,2\pi)} \cos^2(\varphi) = 1$$

(b) Mit der Mittelwerteigenschaft erhalten wir:

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}$$

wobei wir $\cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ genutzt haben.