
PVK MATHEMATIK III

HS23

Hrvoje Krizic, Yuma Stäubli

Contents

1	Differentialgleichungssysteme	4
1.1	Einführung	4
1.2	Vektorraum*	5
1.2.1	Definition	5
1.2.2	Basis	6
1.3	Diagonalisierbarkeit	8
1.3.1	Hermitesche und symmetrische Matrizen*	12
1.4	Exponential einer diagonalisierbaren Matrix	12
1.5	Jordan-Normalform	14
1.6	Mehrdimensionale Variation der Konstanten*	16
1.7	Lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung	19
2	Fourier-Reihen	21
2.1	Einführung	21
2.2	Allgemeine Formeln für die reellen Fourierkoeffizienten	21
2.3	Berechnung der Fourierkoeffizienten	22
2.3.1	Tipps und Tricks	22
2.3.2	Gerade und ungerade Funktionen	22
2.3.3	Trigonometrische Funktionen	23
2.3.4	Beispiele	23
2.4	Anwendung: Reihen berechnen	25
2.5	Fortsetzungen	26
2.6	Komplexe Fourierreihe	28
2.6.1	Allgemeine Periode	29
2.7	Zusammenfassung	32
3	Laplace Transformation	34
3.1	Einführung und Definition	34
3.2	Hintransformation	35
3.2.1	Transformationen mit dem Integral	35
3.2.2	Rechenregeln der Laplace Transformationen	35
3.2.3	Beispiele mit den Rechenregeln	37
3.3	Faltung	39
3.3.1	Definition und Beispiel	39
3.3.2	Faltungssatz	40
3.4	Rücktransformation	41
3.4.1	Rücktransformation mit Rechenregeln	41
3.4.2	Rücktransformationen mit Faltungssatz	42
3.4.3	Rücktransformationen mit Partialbruchzerlegung	44
3.4.4	Allgemeine Rücktransformation	47
3.5	Integral- und Differentialgleichungen	48
3.5.1	Inhomogene Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	48
3.5.2	Integralgleichungen	53

4	Partielle Differentialgleichungen	56
4.1	Definition und Randbedingungen	56
4.2	Fouriermethode	56
4.2.1	Separationsansatz	56
4.2.2	Superposition	58
4.2.3	Rezept	59
4.2.4	Beispiele	60
4.3	Laplace-Gleichung	64
4.3.1	Wärmeleitgleichung auf einer Scheibe	64

1 Differentialgleichungssysteme

Wichtige Kapitel aus Mathematik I und II: Ganzes Kapitel 5 und 6.4.

1.1 Einführung

Zum Einstieg schauen wir uns ein Beispiel aus der Mathematik I Vorlesung an. Wir haben ein Organ gegeben, das eine gewisse Substanz mit der Rate a abgibt während es eine Menge $M(t)$ dieser Substanz aufnimmt. Die Differentialgleichung (mit $y(x)$ = "Substanz im Organ") welche die Änderung im Organ beschreibt ist dann gegeben durch

$$y'(t) = M(t) - ay(t)$$

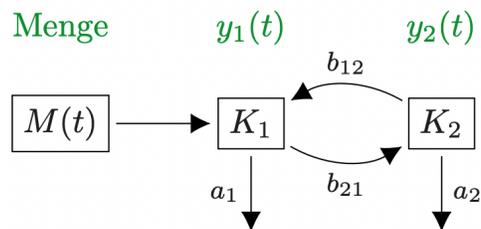
Wir nehmen nun zunächst an, dass $M(t) = 0$. Dann erhalten wir die homogene Differentialgleichung

$$y'(t) = -ay(t).$$

Die Lösung dieser DGL ist gegeben durch

$$y(t) = Ce^{-at}.$$

Die Konstante C kann durch die Anfangsbedingung $y(0) = C$ bestimmt werden. Nun möchten wir uns zwei Organe (K_1 und K_2) anschauen mit dem folgenden Modell: Wie



sehen nun die Differentialgleichungen aus? Wir haben nun eine Funktion für die Menge der Substanz in K_1 und eine Funktion für die Menge der Substanz in K_2 . $M(t)$ wird K_1 zugeführt und K_1 baut die Substanz mit der Rate a_1 ab (mit Rate meint man immer $a \cdot y(t)$). Die Rate b_{21} kommt vom Organ K_1 zum Organ K_2 . K_2 baut diese Substanz dann mit der Rate a_2 ab und gibt wieder die Rate b_{12} zurück zu K_1 . Die Differentialgleichungen, welche wir für $y_1(t)$ und $y_2(t)$ erhalten sind dann

$$y_1'(t) = M(t) - a_1 y_1(t) - b_{21} y_1(t) + b_{12} y_2(t)$$

$$y_2'(t) = b_{21} y_1(t) - a_2 y_2(t) - b_{12} y_2(t).$$

Nun können wir nicht mehr die Differentialgleichungen getrennt lösen, da die eine von der anderen abhängt. Die Differentialgleichungen sind **gekoppelt**. Um gekoppelte Differential-

gleichungen zu lösen, müssen wir diese in Matrixschreibweise bringen:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_1 + b_{21}) & b_{12} \\ b_{21} & -(a_2 + b_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

oder kürzer $y'(t) = Ay(t)$ mit $y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$, $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ und

$$A = \begin{pmatrix} -(a_1 + b_{21}) & b_{12} \\ b_{21} & -(a_2 + b_{12}) \end{pmatrix}$$

Wenn wir uns aber die Differentialgleichung $y'(t) = Ay(t)$ anschauen, so sehen wir, dass sie die gleiche Form annimmt wie die eindimensionale Differentialgleichung $y'(t) = ay(t)$ dessen Lösung bekanntlich $y(t) = Ce^{at}$ ist. Nun haben wir statt a eine Matrix A . Die Lösung müsste aber die gleiche Form annehmen, also $y(t) = e^{At}C$. Die Frage ist nur, was ist e^A . Man beachte, dass C hier ebenfalls ein Vektor ist:

$$C = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

Da $y(t)$ auch ein Vektor ist, muss also e^A entweder ein Skalar oder eine Matrix sein. Schauen wir uns die mathematische Definition von der Exponentialfunktion an, so haben wir beim einsetzen einer Matrix A folgendes:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

wobei wir $A^0 = E$ (die Einheitsmatrix mit nur 1 in der Diagonalen) setzen. A^k sind Matrixmultiplikationen und somit ergibt e^A eine Matrix. Wie wir diese Matrix berechnen, werden wir in diesem Kapitel sehen.

1.2 Vektorraum*

Hinweis: Dieses Kapitel ist nicht allzu wichtig für die Prüfung, aber sehr gut für das Verständnis von wichtigen Begriffen wie der Basis eines Vektorraums und damit für die Lösungen eines DGL-Systems.

1.2.1 Definition

Ein reeller Vektorraum V ist eine Menge mit zwei Operationen

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V, & (v, w) &\mapsto v + w \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V, & (\lambda, v) &\mapsto \lambda v \end{aligned}$$

so, dass für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $v + u = u + v$

2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
4. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
5. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
6. Es existiert ein Vektor $1 \in V$, sodass $1 \cdot v = v$
7. Es gibt einen Nullvektor $0 \in V$ mit $u + 0 = u$ für beliebiges $u \in V$.
8. Es gibt ein additives Inverses $-u \in V$ mit $u + (-u) = 0$.

All diese Eigenschaften scheinen zunächst trivial sein. Dies ist so, weil wir als Vektor meistens ein Element aus \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^2 verstehen, also beispielsweise $v = (1, 2, 3)^T$. Sowohl \mathbb{R}^2 als auch \mathbb{R}^3 sind beides reelle Vektorräume. Man beachte aber, dass beispielsweise \mathbb{N} kein reeller Vektorraum ist. Denn unsere Abbildung der Skalaren Multiplikation hat die Zielmenge V . Wenn wir aber ein Element aus \mathbb{N} mit einer reellen Zahl multiplizieren, erhalten wir keine natürliche Zahl mehr. Beispielsweise kann $\lambda = \pi \in \mathbb{R}$ gewählt werden und unser Element $v = 4 \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lambda v = 4\pi \notin \mathbb{N}$. Allgemein gilt, dass \mathbb{N}^k kein reeller Vektorraum ist. \mathbb{Q} ist ebenfalls kein Vektorraum (Wieso?).

1.2.2 Basis

Wir möchten uns nun einen Vektor aus \mathbb{R}^3 anschauen. Nehmen wir beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jeden Vektor können wir ja eindeutig identifizieren durch die einzelnen Komponenten. Beispielsweise gilt offensichtlich

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

da die letzte Komponente nicht übereinstimmt. Diese einfache Art, einen Vektor eindeutig mit seinen Komponenten zu beschreiben können wir uns auch als Linearkombination denken. Denn ein Vektor ist eindeutig durch folgende Linearkombination definiert:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der erste Vektor $e_1 = (1, 0, 0)^T$ gibt uns die erste Komponente des Vektors, der zweite Vektor e_2 die zweite Komponente und der dritte Vektor e_3 die dritte. Wir können nun jeden Vektor aus \mathbb{R}^3 als eine Linearkombination von diesen Vektoren schreiben. Die Eigenschaft, dass drei

Vektoren alle Vektoren aus \mathbb{R}^3 "erzeugen", haben genau Vektoren, welche ein sogenanntes "Erzeugendensystem" bilden. Ein weiteres Beispiel eines Erzeugendensystems für \mathbb{R}^3 wäre

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Versuche als Übung den Vektor $(1, 2, 3)^T$ als Linearkombination von diesen Vektoren zu schreiben. Wie wir sehen, hat dieses Erzeugendensystem aber vier Vektoren, während unser "Komponenten"-Erzeugendensystem insgesamt nur drei Vektoren hatte. Das kleinstmögliche Erzeugendensystem hat genau so viele Vektoren, wie die Dimension des Vektorraums. \mathbb{R}^n hat dabei Dimension $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, also in unserem Fall 3. Somit ist das Erzeugendensystem $\{e_1, e_2, e_3\}$ das kleinstmögliche Erzeugendensystem. Diese minimalen Erzeugendensysteme haben in der Mathematik einen speziellen Namen: wir nennen sie die **Basis** des Vektorraums. Um zu überprüfen, ob eine Menge an Vektoren eine Basis bildet, müssen wir also zwei Punkte beweisen:

Rezept. (Beweise, ob ... eine Basis ist.)

1. Zeige, dass die Menge linear unabhängig ist. Im Falle von \mathbb{R}^n kann man die Vektoren als Spalten in eine Matrix schreiben und dessen Determinante ermitteln. Ist diese $\neq 0$ so ist die Menge linear unabhängig.
2. Die Anzahl der Elemente (Vektoren) muss genau der Dimension des Vektorraums entsprechen.

(Falls noch unklar ist, was "linear unabhängig" bedeutet, schaue nochmals im Kapitel der Linearen Algebra nach) Die Dimensionen von wichtigen Vektorräumen sind hier angegeben:

$$\begin{aligned} \dim(M_{n \times n}) &= n^2 \\ \dim(\mathbb{P}_n[x]) &= n + 1 \\ \dim(\mathbb{R}^n) &= n \end{aligned}$$

wobei wir $M_{n \times n}$ den Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen nennen und $\mathbb{P}_n[x]$ der Vektorraum aller Polynom bis zum n -ten Grad ist.

Beispiel. Ist die folgende Menge eine Basis von $M_{2 \times 2}$?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösung. Wir überprüfen die beiden Eigenschaften:

1. Die vier Matrizen müssen linear unabhängig sein, da sie jeweils für eine Komponente stehen. Wir können also nicht aus den anderen drei Matrizen die vierte per Linearkombination bilden.

2. Die Dimension ist $\dim(M_{2 \times 2}) = 2^2 = 4$ und wir haben genau 4 Matrizen. Somit ist die Menge eine Basis.

Beispiel. Ist die folgende Menge eine Basis von \mathbb{R}^3 ?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösung. Wir überprüfen die beiden Eigenschaften:

1. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, berechnen wir die Determinante der Matrix mit den Vektoren in den Spalten:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Damit ist die Menge linear unabhängig.

2. Die Dimension ist $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ und wir haben genau 3 Vektoren. Somit ist die Menge eine Basis.

Ein wichtiger Satz für unsere DGL-Systeme ist folgender:

Satz. Sei das DGL-System $y'(t) = Ay(t)$ gegeben. Dann ist die Basis des Lösungsraums dieser DGL gegeben durch die Spaltenvektoren von e^{tA} . Wir nennen diese Spaltenvektoren das **Fundamentalsystem der Differentialgleichung**. Die Lösung kann dann geschrieben werden als

$$y(t) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n$$

wobei w_i die Spaltenvektoren von e^{tA} sind und a_i Konstanten (sie entsprechen den Komponenten von y_0).

1.3 Diagonalisierbarkeit

Sei eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir wissen bereits, wie wir die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix bilden. Wir erhalten die Eigenwerte (Übung!)

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

und wir erhalten die dazugehörigen Eigenvektoren¹

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Mit etwas nachrechnen, können wir sehen, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Wir haben also 3 Eigenvektoren der Matrix A und die drei Vektoren sind linear unabhängig. Dies wird wichtig sein für später. Nicht jede 3×3 Matrix hat aber 3 linear unabhängige Eigenvektoren. Sei die folgende Matrix gegeben:

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel. Wie viele Eigenvektoren hat B ?

Lösung. Wir erhalten die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 9 \text{ und } \lambda_{2,3} = 6$$

Für λ_1 ergibt sich

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und für $\lambda_{2,3}$ erhalten wir nur einen Eigenvektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obwohl wir also eine 3×3 -Matrix haben, hat diese nur 2 Eigenvektoren. Man beachte hierbei, dass eine $n \times n$ -Matrix immer n Eigenwerte hat, diese jedoch mit einer Vielfachheit auftreten können (wie im letzten Beispiel der Eigenwert $\lambda = 6$ zweimal auftritt).

$n \times n$ -Matrizen welche die Eigenschaft besitzen, n linear unabhängige Eigenvektoren zu haben, nennen wir diagonalisierbar. Wir können diese Matrizen nämlich wie folgt zerlegen:

$$A = TDT^{-1} \text{ bzw. } T^{-1}AT = D$$

¹Im Folgenden werden wir den Faktor t vor den Eigenvektoren weglassen. Dieser ist nicht wichtig für das Diagonalisieren. Denn Vektoren, welche sich nur durch eine Multiplikation mit einem Skalar unterscheiden, sind linear abhängig und deswegen nicht interessant.

Dabei ist A die diagonalisierbare Matrix, D ist die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

mit allen Eigenwerten in der Diagonale, und T ist die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

mit allen Eigenvektoren in den Spalten. T^{-1} ist die Inverse von T . Die Inverse für 3×3 und grössere Matrizen zu bestimmen ist sehr mühsam. Für 2×2 Matrizen haben wir aber die folgende Formel:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Für 3×3 -Matrizen verweisen wir hier auf das Skript Mathematik I/II.

Wir möchten das Diagonalisieren einer Matrix in einem Rezept zusammenfassen:

Rezept. ($n \times n$ Matrix A diagonalisieren)

1. Finde die Eigenwerte der Matrix A (mit $\det(A - \lambda E) = 0$ setzen).
2. Finde die dazugehörigen Eigenvektoren v_1, v_2, \dots (indem du das homogene Gleichungssystem $A - \lambda_i E = 0$ löst)
3. Nun gibt es zwei Fälle:
 - (a) Fall 1: Falls wir nicht n linear unabhängige Eigenvektoren haben, ist die Matrix nicht diagonalisierbar und wir müssen nicht mehr weiterrechnen.
 - (b) Fall 2: Hat die Matrix n linear unabhängige Eigenvektoren, so können wir T aufstellen:

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

und berechnen T^{-1} entweder mit der Formel für 2×2 Matrizen, oder mit dem Computer.

4. Die Zerlegung ist dann

$$A = TDT^{-1} \text{ bzw. } T^{-1}AT = D$$

Wir möchten dieses Rezept anhand von zwei Beispielen anwenden:

Beispiel. Diagonalisiere

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir gehen vor, wie im Rezept:

1. Wir erhalten die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$$

2. Die dazugehörigen Eigenvektoren (beachte die Reihenfolge) sind beispielsweise

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Die beiden Vektoren sind linear unabhängig (da keines der beiden ein Vielfaches des anderen ist) und wir haben genau 2 davon. Somit ist die Matrix diagonalisierbar und die Matrix T lautet

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit der Formel von oben erhalten wir

$$T^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

4. Die Zerlegung ist dann

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_T = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}_D$$

Beispiel. Diagonalisiere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir lösen die Aufgabe mit dem Rezept

1. Für die Eigenwerte erhalten wir nur $\lambda_{1,2} = 1$.

2. Wir erhalten nur einen dazugehörigen Eigenvektor:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Wir haben insgesamt nur einen Eigenvektor und somit ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

1.3.1 Hermitesche und symmetrische Matrizen*

Eine reelle Matrix nennen wir symmetrisch, falls

$$A = A^T$$

gilt. Die Einträge sind also an der Diagonalen gespiegelt. Ein Beispiel dafür ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Eine hermitesche Matrix ist die komplexe Matrix A , welche folgende Eigenschaft erfüllt:

$$A = \bar{A}^T$$

Sie ist sehr ähnlich wie eine symmetrische Matrix, nur sind die Einträge nicht nur gespiegelt, sondern auch komplex konjugiert. Ein Beispiel davon ist

$$\begin{pmatrix} i & 2+i & i \\ 2-i & 9i & 1-i \\ -i & 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

Wir führen diese zwei Begriffe ein, um schneller entscheiden zu können, ob Matrizen diagonalisierbar sind oder nicht, denn es gilt:

Merken. Symmetrische und hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar.

1.4 Exponential einer diagonalisierbaren Matrix

Für was brauchen wir nun überhaupt den Begriff der Diagonalisierbarkeit. Es stellt sich heraus, dass dieser sehr nützlich ist, um das Exponential e^A einer Matrix zu berechnen. Schauen wir uns mal A^k für eine diagonalisierbare Matrix A an. Dann haben wir T und D so berechnet, dass folgendes gilt

$$A^k = (TDT^{-1})^k$$

Wenn wir nun aber die Potenz ausschreiben erhalten wir

$$A^k = T \underbrace{D T^{-1} T}_E \underbrace{D T^{-1} T}_E D T^{-1} \dots T \underbrace{D T^{-1} T}_E D T^{-1} = T D^k T^{-1}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $T^{-1}T$ genau die Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt.

Merken. Es gilt also

$$A^k = TD^kT^{-1}.$$

Wenn wir das nun in unsere Definition des Exponentials einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} TD^kT^{-1} \\ &= T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k \right) T^{-1} \\ &= Te^DT^{-1} \end{aligned}$$

Wie lässt sich nun e^D bestimmen? Ohne Beweis gilt hierfür ganz einfach

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \implies e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix}$$

Wie hilft uns das nun beim lösen der Differentialgleichung? Ganz einfach!

Merken. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'(t) = Ay(t)$ ist gegeben durch

$$y(t) = e^{tA}y(0)$$

Häufig wird auch die Notation $y_0 := y(0)$ verwendet.

Beispiel. Bestimme für die oben berechnete Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

das Exponential e^A und e^{At} für beliebiges $t \in \mathbb{R}$. Was ist nun die Lösung des DGL-Systems $y'(t) = Ay(t)$ mit $y(0) = (1, 1)^T$.

Lösung. Wir haben schon die Zerlegung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_T = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}_D$$

in einem vorherigen Beispiel berechnet. Da $e^A = Te^{DT}^{-1}$, können wir dies direkt ausrechnen.

$$e^A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^5 + 2e^2 & 2e^5 - 2e^2 \\ e^5 - e^2 & 2e^5 + e^2 \end{pmatrix}$$

Das Exponential e^{tA} erhalten wir, indem wir die Diagonalmatrix D einfach mal t rechnen. Also

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{5t} + 2e^{2t} & 2e^{5t} - 2e^{2t} \\ e^{5t} - e^{2t} & 2e^{5t} + e^{2t} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Differentialgleichungssystems ist gegeben durch

$$y(t) = e^{tA}y(0)$$

also in unserem Fall

$$y(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{5t} + 2e^{2t} & 2e^{5t} - 2e^{2t} \\ e^{5t} - e^{2t} & 2e^{5t} + e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}$$

Es gelten folgende zwei Rechenregeln für Exponentiale mit Matrizen:

1. Falls $AB = BA$, dann gilt $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ (Achtung!: $AB = BA$ ist nicht immer wahr).
2. Für die Inverse des Exponentials gilt $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

1.5 Jordan-Normalform

Was tun wir nun, wenn eine Matrix nicht diagonalisierbar ist? Wie berechnen wir dann das Exponential? Das schöne ist, dass immernoch eine Zerlegung existiert, nämlich genau die folgende

$$A = PJP^{-1}$$

Man muss hier aber gut aufpassen, dass man diese Zerlegung nicht mit der Diagonalisierung verwechselt. Zum einen ist J keine Diagonalmatrix, sondern die sogenannte Jordan-Normalform und P besteht auch nicht aus Eigenvektoren. Wir werden in diesem Abschnitt nicht lernen, wie wir P oder J im allgemeinen Fall ausrechnen, aber wir möchten zumindest klären, was die Jordan-Normalform genau ist.

Eine Jordan-Normalform ist eine sogenannte Blockmatrix. Sie besteht also aus lauter kleineren Matrizen in der Diagonalen. Ein Beispiel einer allgemeinen Blockmatrix ist beispiel-

sweise

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{5} & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Die Jordan-Normalform hat ebenfalls solche Blöcke in der Diagonalen. Diese Blöcke nennen sich Jordan-Blöcke. Ein 2×2 Jordan-Block (bzw. ein Jordan-Block der Länge 2) ist von der Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Ein Jordan-Block der Länge 3 ist von der Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

und so weiter. Man merke sich dabei folgende Regeln

- Merken.** 1. Ein Jordan-Block hat genau einen Eigenwert auf der ganzen Diagonalen. Verschiedene Jordan-Blöcke können zwar den gleichen Eigenwert haben, aber ein Jordan-Block kann keine zwei verschiedene Eigenwerte auf der Diagonalen haben.
2. Die Einträge über den Eigenwerten werden alle mit Einsen gefüllt.

Nun ist folgendes sehr wichtig:

Satz. Das Exponential eines 2×2 -Jordan-Blocks multipliziert mit t ist gegeben durch

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Exponential eines 3×3 -Jordan-Blocks multipliziert mit t ist gegeben durch

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Jordan-Normalform einer Matrix hat dann beispielsweise die folgende Form:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_i} & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_j} \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass die Eigenwerte der Blöcke auch gleich sein können. Falls also eine Matrix

A die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_{2,3} = 4$ hat, so sind die folgenden Matrizen beide möglich:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

Da Jordan-Normalformen und deren Zerlegungen sehr aufwendig sind zu berechnen, können wir zur Berechnung von J den Computer verwenden. Zuletzt:

Satz. Das Exponential von tJ ist gegeben durch

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \boxed{e^{tJ_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{e^{tJ_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

mit den Exponentialen der Jordan-Blöcke in der Diagonalen. Falls ein DGL-System $y' = Ay$ gegeben ist, und die Matrix A nicht diagonalisierbar ist, so ist das Matrix-exponential $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$.

1.6 Mehrdimensionale Variation der Konstanten*

Hinweis: Dieses Kapitel wurde in der Vorlesung nicht besprochen, war aber grundlegender Bestandteil vieler alten Prüfungen. Somit lohnt es sich dies nur kurz anzuschauen.

Bis jetzt haben wir uns nur homogene DGL-Systeme angeschaut. Wie ist es aber nun, wenn das System gegeben ist durch die inhomogene Differentialgleichung

$$y'(t) = Ay(t) + Z(t)$$

Wir nennen (wie im eindimensionalen Fall) $Z(t)$ den Störterm. Wie gehen wir nun vor?

Rezept. (Bestimmung der Lösung eines inhomogenen DGL-Systems)

1. Bestimme e^{tA} indem du A entweder diagonalisierst oder die Jordan-Normalform bestimmst.
2. Die Lösung des inhomogenen DGL-Systems ist nun gegeben durch

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-u) \cdot A} \cdot Z(u) du$$

Der erste Term ist klar (das ist die homogene Lösung, also falls man sich $Z(t)$ wegdenkt). Für das Integral muss zunächst bei e^{tA} das t durch $t - u$ ersetzt werden und dann das Matrix-Vektor-Produkt mit $Z(u)$ berechnet werden. Du erhältst einen Vektor im Integral, dessen Komponenten du integrierst.

Wir schauen uns dieses Rezept an einem Beispiel genauer an.

Beispiel. Bestimme die Lösung des folgenden DGL-Systems:

$$y'(t) = Ay(t) + Z(t)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad Z(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir berechnen zunächst das Matrixexponential e^{tA} . Dazu diagonalisieren wir die Matrix. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$. Die dazugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (wir sehen hier, dass die Matrix diagonalisierbar ist). Wir erhalten also

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und mit der Formel für das Inverse der 2×2 -Matrix

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Zerlegung ist somit

$$A = TDT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$e^{tA} = Te^{tD}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & -e^{-\frac{t}{3}} + e^{-\frac{t}{2}} \\ 0 & e^{-\frac{t}{3}} \end{pmatrix}$$

Wir verwenden nun die Formel

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-u)A} \cdot Z(u) du$$

Der erste Term ist

$$e^{tA}y_0 = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & -e^{-\frac{t}{3}} + e^{-\frac{t}{2}} \\ 0 & e^{-\frac{t}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-\frac{t}{3}} + e^{-\frac{t}{2}} \\ e^{-\frac{t}{3}} \end{pmatrix}$$

und der zweite Term ist gegeben durch das Integral

$$\begin{aligned}
 \int_0^t e^{(t-u) \cdot A} \cdot Z(u) \, du &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\frac{t-u}{2}} & -e^{-\frac{t-u}{3}} + e^{-\frac{t-u}{2}} \\ 0 & e^{-\frac{t-u}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, du \\
 &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\frac{t-u}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \, du \\
 &= \begin{pmatrix} 2e^{-\frac{t-u}{2}} \Big|_0^t \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 - 2e^{-\frac{t}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die gesamte Lösung ist also

$$y(t) = e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-u) \cdot A} \cdot Z(u) \, du = \begin{pmatrix} -e^{-\frac{t}{3}} - e^{-\frac{t}{2}} + 2 \\ e^{-\frac{t}{3}} \end{pmatrix}$$

1.7 Lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung

Differentialgleichungen n -ter Ordnung sind von der Form

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x' + a_0x = g(t)$$

Dabei sind a_i Koeffizienten und $x^{(k)}$ bezeichnet die k -te Ableitung. Wir denken uns zunächst $g(t)$ weg und schauen uns die homogene DGL an. Was ist nun die Lösung dieser Differentialgleichung? Wir zeigen das Rezept dafür anhand des Beispiels

$$x''' + x'' - 5x' + 3 = 0$$

Rezept. (Lösen einer DGL n -ter Ordnung)

1. Tausche alle $x^{(k)}$ durch λ^k aus und erhalte somit das sogenannte charakteristische Polynom $p(\lambda)$ auf der linken Seite unserer DGL (rechts sollte immer die 0 stehen). In unserem Beispiel also

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3$$

2. Berechne die Nullstellen dieses Polynoms inklusive deren Vielfachheit. Da $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 3)$ gilt, ist die Vielfachheit von $\lambda_1 = 1$ genau 2 und von $\lambda_2 = -3$ einfach 1.
3. Das Fundamentalsystem der Differentialgleichung ist gegeben durch alle Terme $e^{\lambda_i t}$ wenn die Vielfachheit 1 ist und bei Vielfachheit $m \geq 2$ gehören $e^{\lambda_i t}$, $te^{\lambda_i t}$, $t^2e^{\lambda_i t}$..., $t^m e^{\lambda_i t}$ ins Fundamentalsystem. In unserem Beispiel also

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{-3t}$$

und das Fundamentalsystem ist $\{e^t, te^t, e^{3t}\}$.

Wieso dies funktioniert liegt daran, dass wir die Differentialgleichung als DGL-System aufschreiben können. Wenn wir

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

wählen, so ist

$$y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

Mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

erhalten wir (wie sich schnell überprüfen lässt) das DGL-System $y'(t) = Ay(t)$. Die erste Komponente von $y(t)$ (der Lösung dieses Systems) ist dann genau $x(t)$ (die Lösung der linearen DGL n -ter Ordnung). In unserem Beispiel wäre das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ x'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}$$

Wieso ist nun das Rezept gültig? Es lässt sich tatsächlich zeigen, dass die Eigenwerte genau berechnet werden mit dem charakteristischen Polynom aus dem Rezept. Die Folgerung, dass das Fundamentalsystem dann $e^{\lambda t}$ beinhaltet haben wir schon im Kapitel der Diagonalisierung gesehen.

2 Fourier-Reihen

Wichtige Kapitel aus Mathematik I und II: Kapitel 3 (v.a. partielle Integration sollte sitzen) und 4 (v.a. Polarform), ausserdem soll der Begriff der Periode T klar sein (Kapitel 1.2.5).

2.1 Einführung

In der Natur treten sehr häufig periodische Funktionen auf. Angefangen beim Herzschlag über Pendelschwingungen bis hin zu Ton und Licht. Als Periode wird dabei jeweils eine bestimmte Zeitdauer bezeichnet. Jedoch liefert die reine Aufnahme solcher Signale nur wenige Informationen. Ziel der Fourierreihen ist es, derlei unübersichtlich periodische Funktionen möglichst verständlich, das heisst mit den uns vertrauten trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$, darzustellen.

Ziel wird es sein, eine Funktion in folgende Darstellung zu bringen:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Die Koeffizienten a_k und b_k werden ausreichend sein, um die ganze Funktion zu beschreiben.

2.2 Allgemeine Formeln für die reellen Fourierkoeffizienten

Für eine Funktion $f(x)$ (schön genug), definiert auf $[-T/2, T/2)$ mit einer allgemeinen Periode T , erhalten wir die Fourierreihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right)$$

mit Fourierkoeffizienten gegeben durch

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) dx \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) dx. \end{aligned}$$

Wichtige Bemerkung 1. In den obigen Formeln für die Fourierkoeffizienten haben wir Integrale von $-T/2$ bis $T/2$ benutzt. Falls in der Aufgabenstellung jedoch $f(x)$ nicht auf $[-T/2, T/2)$, sondern zum Beispiel auf $[0, T)$ gegeben ist, dann müssen wir die Integralgrenzen von 0 bis T wählen.

Wichtige Bemerkung 2. In manchen Fällen genügt es, die a_k zu berechnen und dann a_0 daraus mit $k = 0$ abzuleiten. Im Allgemeinen muss man jedoch die a_0 separat mit der Formel von oben berechnen.

2.3 Berechnung der Fourierkoeffizienten

2.3.1 Tipps und Tricks

Bevor wir beginnen, die Fourierkoeffizienten zu berechnen, möchten wir an dieser Stelle zwei Tipps geben zur Berechnung der Integralen:

2.3.2 Gerade und ungerade Funktionen

Es gilt

1. Ist die Funktion ungerade, also $f(-x) = -f(x)$, so gilt (zum Beispiel für $\sin(kx)$)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

2. Ist die Funktion gerade, also symmetrisch an der y -Achse (oder $f(-x) = f(x)$), so gilt

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx.$$

Eine gerade Funktion ist beispielsweise $\cos(kx)$

Vor allem der erste Satz wird sehr wichtig sein für unsere Berechnungen, da wir bei den Fourierkoeffizienten ebenfalls Grenzen haben, welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Was ist nun, wenn wir ein Produkt von gerader oder ungerader Funktionen haben, wie zum Beispiel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(kx) dx$$

Dann können wir folgenden Trick verwenden:

Trick. Haben wir ein Produkt aus lauter gerader oder ungerader Funktionen, so können wir jede ungerade Funktion durch eine -1 ersetzen und jede gerade Funktion durch eine 1 . Wenn das Produkt 1 ergibt, so ist das Produkt der Funktionen gerade. Wenn sie hingegen -1 ergibt, ist das Produkt der Funktionen ungerade.

Es folgt also direkt mit dieser Überlegung

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(kx) dx = 0.$$

Beispiel. Ist $f(x) = x \cos(x) \sin(x)$ gerade oder ungerade?

Lösung. Wir haben x ungerade, $\cos(x)$ gerade und $\sin(x)$ ungerade. Somit ist die ganze Funktion $(-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 1$ gerade.

Was bedeuten nun diese Aussagen für unsere Fourierkoeffizienten? a_k ist ein Integral vom Produkt aus $f(x)$ und der geraden Funktion $\cos(kx)$. Das bedeutet: wenn $f(x)$ ungerade

ist, so ist $a_k = 0$. Ähnliches gilt für b_k . Da $\sin(kx)$ ungerade ist, muss $b_k = 0$ gelten, falls $f(x)$ gerade ist. Zusammengefasst gilt also

$$\begin{aligned} f(x) \text{ ungerade} &\implies a_k = 0 \\ f(x) \text{ gerade} &\implies b_k = 0 \end{aligned}$$

Bemerkung. Zu beachten ist, dass dies nur für Funktionen $f(x)$ gilt, die auf einem Intervall $[-T/2, T/2]$ definiert sind. Also im Allgemeinen nicht für Funktionen die auf $[0, T]$ definiert sind.

2.3.3 Trigonometrische Funktionen

Ein kurzer, aber wichtiger Trick ist es, die folgenden trigonometrischen Identitäten zu verwenden:

$$\begin{aligned} \sin(k\pi) &= 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z} \\ \cos(k\pi) &= (-1)^k \text{ für } k \in \mathbb{Z} \\ \sin^2(x) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \\ \cos^2(x) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \end{aligned}$$

Die erste Identität sollte klar sein. Die zweite Identität folgt daraus, dass $\cos(k\pi)$ für k ungerade $= -1$ ist, und für k gerade $= 1$. Diese Eigenschaft erfüllt auch $(-1)^k$. Somit sind diese beiden äquivalent.

2.3.4 Beispiele

Beispiel. Berechne die reellen Fourierkoeffizienten von der 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion $f(x) = x$ auf $[-\pi, \pi]$.

Lösung. Die Funktion x ist ungerade. Somit gilt $a_k = 0$. Wir müssen also nur noch b_k berechnen:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx \\ &= \left. \frac{-kx \cos(kx) + \sin(kx)}{\pi k^2} \right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi k^2} (\sin(k\pi) - \pi k \cos k\pi) \end{aligned}$$

Da $k \in \mathbb{N}$ ist, können wir $\sin(k\pi) = 0$ und $\cos(k\pi) = (-1)^k$ setzen. Wir erhalten also

$$b_k = \frac{-2 \cdot (-1)^k}{k}$$

Beispiel. Berechne die reellen Fourierkoeffizienten von der 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0) \\ 1 & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

auf $[-\pi, \pi)$.

Lösung. Die Funktion ist ungerade und somit ist $a_k = 0$. Wir berechnen nun b_k :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx \\ &= \frac{2 \cdot (1 - \cos(k\pi))}{k\pi} = \frac{2 \cdot (1 - (-1)^k)}{k\pi} \end{aligned}$$

In der ersten Gleichung haben wir benutzt, dass $f(x)$ ungerade, und somit $f(x) \sin(kx)$ gerade ist.

Beispiel. Berechne die reellen Fourierkoeffizienten von der 2-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = x^2$$

auf $[-1, 1)$.

Lösung. Wir sehen, dass x^2 gerade ist. Deswegen muss auch $b_k = 0$ gelten. Wir berechnen nun a_k :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 x^2 \cos(k\pi x) dx \\ &= \frac{4}{(k\pi)^2} (-1)^k \end{aligned}$$

wobei wir das Integral per DI-Methode ausgerechnet haben (das Berechnen dieses Integrals wird wärmstens jedem empfohlen). Ausserdem haben wir $\cos(k\pi) = (-1)^k$ gesetzt. Es muss hier explizit noch a_0 berechnet werden, da die Lösung oben für $k = 0$ undefiniert ist. Wir erhalten:

$$a_0 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

2.4 Anwendung: Reihen berechnen

Eine coole Anwendung der Fouriertheorie ist, dass wir damit den Wert verschiedener Reihen berechnen können. Als Beispiel betrachten wir die Funktion aus dem vorherigen Kapitel:

$$f(x) = x^2 \text{ auf } [-1, 1),$$

wobei wir die Fourierkoeffizienten im Beispiel bestimmt haben als:

$$a_0 = \frac{2}{3}, \quad a_k = \frac{4}{k^2\pi^2}(-1)^k, \quad b_k = 0.$$

Mit diesen Koeffizienten folgt also für die Fourierreihe mit $T = 2$:

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}(-1)^k \cos(\pi kx).$$

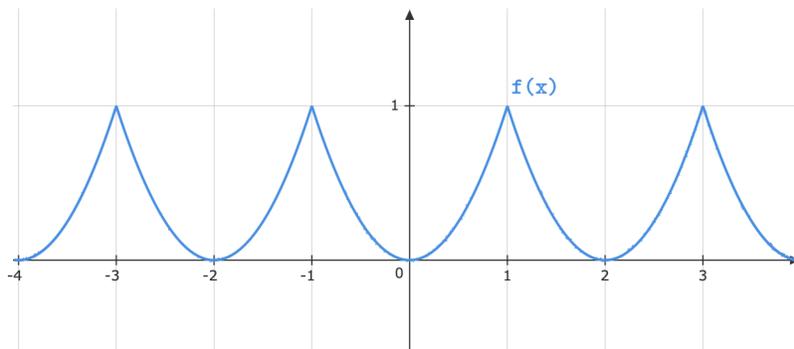
Unser Ziel ist es nun die berühmte Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ zu berechnen. Wir bemerken zuerst, dass die Reihe eine gewisse Ähnlichkeit zu der Fourierreihe von f aufweist, da auch Terme der Form $\frac{1}{k^2}$ vorkommen. Wie können wir diese aber isolieren? Wir müssen zuerst den Term $(-1)^k \cos(\pi kx)$ in der Fourierreihe loswerden. Um dies zu tun, setzen wir clever $x = 1$ in der Fourierreihe ein, d.h.:

$$f(1) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}(-1)^k \cos(\pi k).$$

Und wir merken, dass $(-1)^k \cos(\pi k) = (-1)^k(-1)^k = 1$ gilt. Das heisst, wir sind den Term erfolgreich losgeworden! Wir können auch noch $\frac{4}{\pi^2}$ aus der Reihe rausziehen und erhalten:

$$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Nun müssen wir also nur noch rausfinden, was $f(1)$ ist. Dies sehen wir entweder der Formel für f an, oder indem wir f und seine 2-periodische Fortsetzung aufzeichnen (s. Bild).

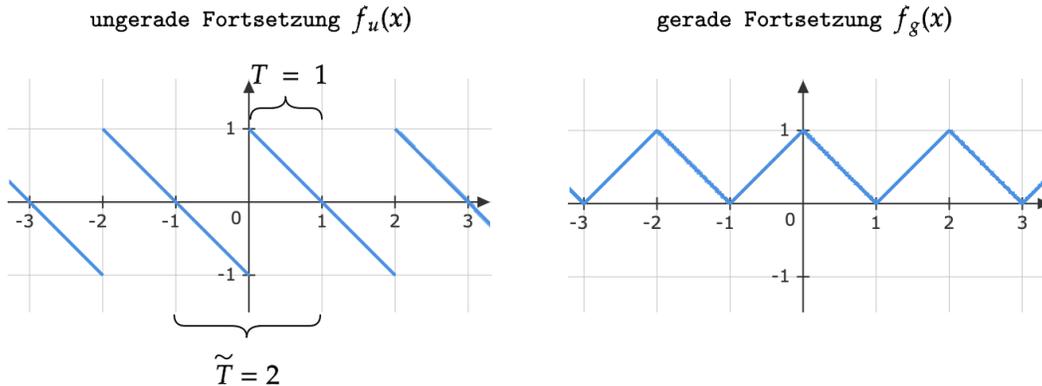


In diesem Fall haben wir also $f(1) = 1$ und somit folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ \implies \frac{2}{3} &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

2.5 Fortsetzungen

In den bisherigen Beispielen waren Funktionen auf einem Intervall $[-T/2, T/2)$ definiert. Hierbei hatten wir sie jeweils implizit T -periodisch zu einer Funktion auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt. Falls aber unsere Funktion f auf einem Intervall $[0, T)$ definiert ist, so können wir sie (statt “normal“ T -periodisch fortzusetzen) auch ungerade oder gerade zu einer $2T$ -periodischen Funktion fortsetzen. Wir können das am Beispiel von $f(x) = 1 - x$ auf $[0, 1)$ im Bild sehen:



Durch diese Art der Fortsetzung bekommen wir also neu je nach Fortsetzung eine ungerade oder gerade Funktion der doppelten Periode $\tilde{T} = 2T$. In unserem Beispiel ist die neue Periode also $\tilde{T} = 2T = 2$.

Was würde nun passieren, wenn wir jeweils von diesen Fortsetzungen die Fourierreihe berechnen? Wir betrachten zuerst die ungerade Fortsetzung f_u und berechnen ihre Fourierkoeffizienten. Wir bemerken, dass obwohl die ursprüngliche Funktion $1 - x$ weder gerade noch ungerade war, wir nun mit der Fortsetzung eine ungerade Funktion erhalten haben. Für die Fourierkoeffizienten von f_u bedeutet dies:

$$a_k = 0.$$

Nun müssen wir nur noch die b_k berechnen und benutzen dafür die Formeln von zuvor. Zu beachten ist, dass wir nun mit der neuen Periode $\tilde{T} = 2$ rechnen, da wir die Fourierkoeffizienten von f_u berechnen wollen. Da f_u ungerade ist und somit $f_u(x) \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{T}} kx\right)$ gerade ist, können wir die 2. Eigenschaft von den Tipps und Tricks für (un-)gerade Funktionen

benutzen:

$$b_k = \frac{2}{\tilde{T}} \int_{-\tilde{T}/2}^{\tilde{T}/2} f_u(x) \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{T}} kx\right) dx = \frac{4}{\tilde{T}} \int_0^{\tilde{T}/2} f_u(x) \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{T}} kx\right) dx.$$

Indem wir zudem $\tilde{T} = 2$ einsetzen und $f_u(x) = 1 - x$ auf $[0, 1)$ gilt bekommen wir:

$$= 2 \int_0^1 f_u(x) \sin(\pi kx) dx = 2 \int_0^1 (1 - x) \sin(\pi kx) dx = \dots = \frac{2}{\pi k}.$$

Wenn wir jetzt die Fourierreihe der ungeraden Fortsetzung bilden, bekommen wir eine Sinusreihe, da die $a_k = 0$ sind:

$$f_u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k \frac{2\pi x}{\tilde{T}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin(k\pi x).$$

Warum ist das alles nützlich? Wir bemerken, dass auf dem Intervall $[0, 1)$ genau $f_u(x) = f(x)$ gilt, also die Fortsetzung gleich der originalen Funktion ist. Somit gilt also für $x \in [0, 1)$ auch

$$f(x) = f_u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin(k\pi x)$$

und wir haben die originale Funktion als eine Sinusreihe entwickelt. Ähnlich können wir allgemeine Formeln für die Fourierkoeffizienten der ungeraden Fortsetzung herleiten:

Merken (Wichtig für PDE's). Zusammengefasst erhalten wir für die $2T$ -periodische ungerade Fortsetzung einer Funktion f auf $[0, T)$:

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{\pi}{T} kx\right) dx.$$

Der grosse Unterschied zu den Formeln für die normale Fortsetzung von f liegt darin, dass wir nicht 2π , sondern nur π im Sinus vom Integral haben.^a Wie oben erhalten wir dann eine Entwicklung von $f(x)$ auf $[0, T)$ als Sinusreihe mit diesen Koeffizienten:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k \frac{\pi x}{T}\right)$$

^aDer Grund, warum wir π anstelle von 2π haben, ist leicht einzusehen. Durch die Fortsetzung erhalten wir die doppelte Periode, sodass sich die 2 wegstreicht.

Bemerkung. Man kann die selbe Rechnung auch für die gerade Fortsetzung von $f(x) = [0, T)$ durchführen und bekommt:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{\pi}{T} kx\right) dx, \quad b_k = 0,$$

sowie für die Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{\pi x}{T}\right)$$

2.6 Komplexe Fourierreihe

Häufig ist es einfacher, statt der reellen Fourierreihe die sogenannte komplexe Fourierreihe auszurechnen. Diese bringt a_k und b_k zusammen und wir bringen mittels des komplexen Fourierkoeffizienten die Fourierreihe auf folgende Form:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Man beachte hierbei, dass die Reihe von $-\infty$ bis ∞ geht. Wie erreichen wir diese Form? Der Trick dabei ist, dass wir $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ umschreiben können mittels den Formeln von Euler:

$$\begin{aligned} \cos(kx) &= \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ \sin(kx) &= \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}) \end{aligned}$$

Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) + \frac{b_k}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \end{aligned}$$

Nun können wir in der zweiten Reihe $-k$ durch k ersetzen, müssen aber dann die Summe genau von $-\infty$ nach -1 laufen lassen. Damit erhalten wir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} e^{ikx}$$

Wenn wir nun den Fourierkoeffizienten c_k definieren als

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases}$$

erhalten wir genau die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Wir haben nun gezeigt, wie wir aus den reellen Fourierkoeffizienten zum komplexen Fourierkoeffizient kommen. Manchmal ist es aber andersrum einfacher. Es lässt sich nämlich zeigen, dass für 2π -periodische Funktionen ($T = 2\pi$) gilt

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Die reellen Fourierkoeffizienten können wir dann berechnen mit den folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} \\ a_0 &= 2c_0 \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) \end{aligned}$$

2.6.1 Allgemeine Periode

Für allgemeine Perioden T ist die Fourierreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2k\pi ix/T}$$

und die Fourierkoeffizienten sind dann

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-2\pi kix/T} dx$$

Wenn wir also die reellen Fourierkoeffizienten berechnen sollten, so ist es manchmal einfacher, die komplexen zuerst zu berechnen und diese dann umzuschreiben. Vor allem Funktionen wie e^{2x} , welche x in der Potenz haben, sollten zuerst mit der komplexen Methode gelöst werden und danach umgewandelt werden. Ein grosser Vorteil der komplexen Fourierreihe ist es, dass wir nur einen Fourierkoeffizienten berechnen müssen, während wir bei den reellen Koeffizienten jeweils zwei berechnen mussten. Ein Nachteil ist aber, dass wir nicht von der Symmetrie (gerade, ungerade) der Funktion profitieren können. Wenn also eine Funktion gerade oder ungerade ist, lohnt es sich die reellen Koeffizienten auszurechnen, da wir dann ebenfalls nur einen ausrechnen müssen (da der andere = 0 wir wegen der Symmetrie).

Beispiel. Berechne die komplexen Fourierkoeffizienten von der 2-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = e^{-x}$$

im Intervall $[-1, 1]$.

Lösung. Wir berechnen den komplexen Fourierkoeffizienten nach der Formel

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x} e^{-\pi k i x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x(1+\pi k i)} dx \\ &= -\frac{1}{2+2\pi k i} e^{-x(1+\pi k i)} \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{2+2\pi k i} (e^{-(1+\pi k i)} - e^{1+\pi k i}) \end{aligned}$$

Um die Lösung zu vereinfachen, verwenden wir, dass $e^{-\pi k i} = (-1)^k$ und $e^{\pi k i} = (-1)^k$ ist. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2+2\pi k i} \left(\frac{(-1)^k}{e} - (-1)^k e \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{2+2\pi k i} \left(e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

Beispiel. Berechne mit dem komplexen Fourierkoeffizienten von e^{-x} (den du im letzten Beispiel berechnet hast) die reellen Fourierkoeffizienten.

Lösung. Wir berechnen die reellen Fourierkoeffizienten mit den Formeln

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} \\ a_0 &= 2c_0 \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{(-1)^k}{2+2\pi ki} \left(e - \frac{1}{e} \right) + \frac{(-1)^{-k}}{2-2\pi ki} \left(e - \frac{1}{e} \right) \\
 &= \left(e - \frac{1}{e} \right) \left(\frac{(-1)^k}{2+2\pi ki} + \frac{(-1)^{-k}}{2-2\pi ki} \right) \\
 &= \left(e - \frac{1}{e} \right) \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2 + 1} \\
 a_0 &= \left(e - \frac{1}{e} \right) \\
 b_k &= i \left(e - \frac{1}{e} \right) \left(\frac{(-1)^k}{2+2\pi ki} - \frac{(-1)^{-k}}{2-2\pi ki} \right) \\
 &= \left(e - \frac{1}{e} \right) \frac{(-1)^k \pi k}{\pi^2 k^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Wir verzichten hier darauf, die Resultate gross zu vereinfachen. Man könnte aber sicherlich noch den komplexen Nenner mit seiner Konjugation multiplizieren.

2.7 Zusammenfassung

Reelle Fourierreihe für allgemeines T

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right)$$

wobei die Fourierkoeffizienten gegeben sind durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) dx$$

Symmetrie der Funktion

$$f(x) \text{ ungerade} \implies a_k = 0$$

$$f(x) \text{ gerade} \implies b_k = 0$$

Trigonometrische Identitäten

$$\sin(k\pi) = 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(k\pi) = (-1)^k \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Komplexe Fourierreihe für allgemeines T

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2k\pi i x/T}$$

und die Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-2\pi k i x/T} dx$$

Reelle \implies Komplexe Fourierkoeffizienten

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - i b_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + i b_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases}$$

Komplexe \implies Reelle Fourierkoeffizienten

$$a_k = c_k + c_{-k}$$

$$a_0 = 2c_0$$

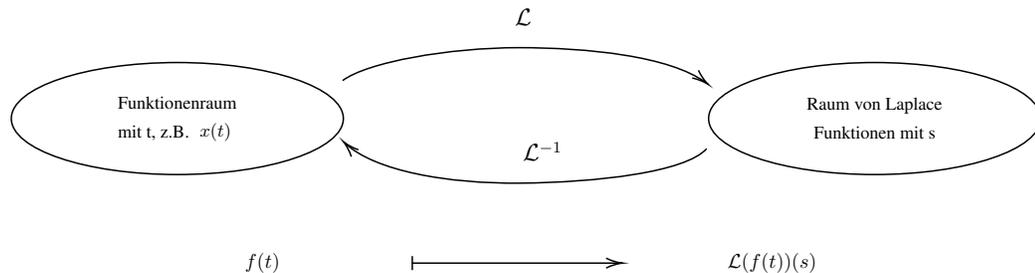
$$b_k = i(c_k - c_{-k})$$

3 Laplace Transformation

Wichtige Kapitel aus Mathematik I und II: Ganzes Kapitel 3, v.a. die PBZ aus Kapitel 3.7 sollte klar sein. Es ist auch von Vorteil, mit dem ersten Kapitel aus diesem PVK Skript vertraut zu sein.

3.1 Einführung und Definition

In diesem Kapitel ist unser Ziel inhomogene Differential- und Integralgleichungen lösen zu können. Dafür stellt sich die Laplace Transformation als nützliches Mittel heraus. Die Grundidee ist dabei, eine Funktion $f(t)$ zu einer anderen Funktion $\mathcal{L}f(s)$ im sogenannten Laplace-Raum zu transformieren. In diesem Laplace-Raum sind dann Integral- und Differentialgleichungen einfacher zu lösen und führen zu einer Lösung dieser Gleichungen im Laplace-Raum. Anschliessend können wir durch eine Rücktransformation vom Laplace-Raum in den "normalen Raum" dann die gesuchte Lösung erhalten. Dies ist im Bild veranschaulicht.



Konkret ist die Laplace Transformation durch ein Integral definiert, und zwar für Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ durch:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-ts} dt,$$

wobei statt $\mathcal{L}(f(t))(s)$ auch andere Notationen wie $\mathcal{L}f(s)$ oder $F(s)$ verwendet werden. Wichtig ist, dass s die Variable der neuen Funktion $\mathcal{L}(f(t))(s)$ ist und im Integral nach t integriert wird.

Bemerkung. Oft wollen wir auch Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ transformieren, die auf allen reellen Zahlen definiert sind. Dann transformieren wir stattdessen die Funktion

$$\begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases},$$

also die gleiche Funktion, wo wir einfach für $t < 0$ die Funktion gleich Null setzen. Dies

können wir auch mit der Heaviside-Funktion $\Theta(t)$ ausdrücken, die definiert ist durch:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

Dann transformieren wir also für ein $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stattdessen $f(t) \cdot \Theta(t)$.

In den Serien wurde manchmal statt $\Theta(t)$ auch $\sigma(t)$ als Notation für die Heaviside-Funktion verwendet.

3.2 Hintransformation

3.2.1 Transformationen mit dem Integral

Unsere ersten Laplace Transformationen von relativ einfachen Funktionen werden direkt mit dem Integral in der Definition berechnet.

Beispiel. Berechne die Laplace-Transformation von $f(t) = e^{at}$ für $s > a$.

Lösung. Wir benutzen direkt die Definition von der Laplace Transformation. D.h. mit $f(t) = e^{at}$:

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} \stackrel{s > a}{=} 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a},$$

wobei wir bei der zweitletzten Gleichheit verwendet haben, dass $s > a$ und somit $e^{(a-s)t} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Mit der Definition durch das Integral können wir noch weitere Transformationen berechnen (s. Beispiele in der Vorlesung), die dann in einer Tabelle zusammengefasst werden können und die Grundlage für alle weiteren Transformationen bilden:

Merken. Wichtige Funktionen mit ihren Transformaten sind:

$f(t)$	$\mathcal{L}f(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^k ($k \in \mathbb{N}$)	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
e^{at} ($s > a$)	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

3.2.2 Rechenregeln der Laplace Transformationen

Die Laplace Transformation kennt viele Rechenregeln, die uns die Berechnung von Transformationen für kompliziertere Funktionen erleichtern. Mit den folgenden Rechenregeln

können nämlich Transformationen von schwereren Funktionen auf jene in der vorherigen Tabelle zurückgeführt werden.

1. Linearität: Die Laplace Transformation ist komplex linear. Das heisst, für $a, b \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen und f, g Funktionen gilt:

$$\mathcal{L}(af(t) + bg(t))(s) = a \mathcal{L}(f(t))(s) + b \mathcal{L}(g(t))(s),$$

das heisst wir können die Multiplikation mit einer Zahl und die Addition zweier Funktionen aus der Transformation "rausziehen".

2. Ähnlichkeitssatz: Für eine reelle Zahl $a > 0$ und eine Funktion $f(t)$ gilt:

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(f(t))\left(\frac{s}{a}\right).$$

3. Verschiebungssätze: Für eine reelle Zahl $h > 0$ und eine Funktion f erfüllt die Laplace Transformation zwei Verschiebungssätze:

3.1 Verschiebung nach rechts:

$$\mathcal{L}(f(t-h) \cdot \Theta(t-h))(s) = e^{-hs} \mathcal{L}(f(t))(s).$$

Bemerkung. Falls man etwas von der Form $f(t-h)\Theta(t-h)$ transformieren muss, dann benutzt man immer diesen Verschiebungssatz.

3.2 Verschiebung nach links:

$$\mathcal{L}(f(t+h))(s) = e^{hs} \left[\mathcal{L}(f(t))(s) - \int_0^h f(t)e^{-st} dt \right].$$

4. Dämpfungssatz: Für eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ und eine Funktion f gilt:

$$\mathcal{L}(e^{-\lambda t} f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s + \lambda).$$

5. Ableitungen im Originalbereich: Ableitungen im Originalbereich bedeutet, dass wir bei der zu transformierenden Funktion $f(t)$ Ableitungen haben, also $\frac{d^n}{dt^n}$. In diesem Fall gilt:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n \mathcal{L}(f(t))(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Explizit brauchen wir diese Formel vor allem für $n = 1, 2$, also:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t))(s) &= s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0), \\ \mathcal{L}(f''(t))(s) &= s^2\mathcal{L}(f(t))(s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

6. Ableitungen im Bildbereich: Im Bildbereich abzuleiten bedeutet, dass wir bei der Laplace transformierten Funktion Ableitungen haben, also $\frac{d^n}{ds^n}$ bei $\mathcal{L}f(s)$. Es gilt:

$$\mathcal{L}(f(t))^{(n)}(s) = \mathcal{L}((-t)^n f(t))(s).$$

7. Integration im Originalbereich: Wie schon zuvor bedeutet dies, dass wir Integrale bei den zu transformierenden Funktionen $f(t)$ haben. Es gilt:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u) du\right)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s).$$

8. Integration im Bildbereich: Auch wie zuvor bedeutet "Bildbereich", dass wir Integrale von den schon transformierten Funktionen betrachten. Es gilt:

$$\int_s^\infty \mathcal{L}(f(t))(u) du = \mathcal{L}(t^{-1}f(t))(s).$$

3.2.3 Beispiele mit den Rechenregeln

Beispiel. Berechne die Laplace Transformierte von $t^2 e^t$.

Lösung. Wir benutzen den Dämpfungssatz mit $f(t) = t^2$ und $\lambda = -1$. Dann gilt:

$$\mathcal{L}(t^2 e^t)(s) = \mathcal{L}(t^2)(s - 1)$$

und mit $\mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}$ aus der bekannten Tabelle von Transformationen folgt:

$$\mathcal{L}(t^2)(s - 1) = \frac{2}{(s - 1)^3}.$$

Beispiel. Berechne die Laplace Transformierte von $\sin(t - 4)\Theta(t - 4) - 3t \sin(t)$.

Lösung. Wir benutzen zuerst die Linearität:

$$\mathcal{L}(\sin(t - 4)\Theta(t - 4) - 3t \sin(t))(s) = \underbrace{\mathcal{L}(\sin(t - 4)\Theta(t - 4))(s)}_{(1)} - \underbrace{3\mathcal{L}(t \sin(t))(s)}_{(2)}.$$

Nun widmen wir uns zuerst dem linken Term (1) indem wir den Verschiebungssatz nach rechts mit $h = 4$ und $f(t) = \sin(t)$ anwenden:

$$\mathcal{L}(\sin(t-4)\Theta(t-4))(s) = e^{-4s}\mathcal{L}(\sin(t))(s) = e^{-4s}\frac{1}{s^2+1},$$

wobei wir die bekannte Transformation $\mathcal{L}(\sin(t))(s) = \frac{1}{s^2+1}$ verwendet haben.

Den rechten Term (2) rücken wir uns zuerst ein bisschen mit der Linearität zurecht:

$$-3\mathcal{L}(t\sin(t))(s) = 3\mathcal{L}(-t\sin(t))(s),$$

so dass wir nun den Ableitungssatz im Bildbereich anwenden können, mit $n = 1$ und $f(t) = \sin(t)$:

$$3\mathcal{L}(-t\sin(t))(s) = 3\mathcal{L}(\sin(t))'(s).$$

Da wir nun die Transformation von $\sin(t)$ kennen, können wir noch fertig rechnen:

$$3\mathcal{L}(\sin(t))'(s) = 3\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = -\frac{6s}{(s^2+1)^2}.$$

Insgesamt erhalten wir so:

$$\mathcal{L}(\sin(t-4)\Theta(t-4) - 3t\sin(t))(s) = \frac{e^{-4s}}{s^2+1} - \frac{6s}{(s^2+1)^2}.$$

Beispiel. Es gilt $\mathcal{L}(\sqrt{t})(s) = \frac{\pi^{1/2}}{2s^{3/2}}$. Berechne die Laplace Transformierte von $t^{3/2}$.

Lösung. Wir müssen nun irgendeine Verbindung von \sqrt{t} zu $t^{3/2}$ finden, so dass wir von der Transformierten von \sqrt{t} auf jene von $t^{3/2}$ schliessen können. Hierbei gibt es mehrere Wege, hier sind drei davon aufgeführt und das erste Beispiel ausführlich ausgerechnet.

1. Es gilt $\frac{d}{dt}t^{3/2} = \frac{3}{2}\sqrt{t}$. Das heisst, wir können den Ableitungssatz im Originalbereich verwenden, nachdem wir auf beiden Seiten der Gleichung die Laplace Transformation anwenden:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}t^{3/2}\right)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}\right)(s).$$

Auf der linken Seite der Gleichung wenden wir dann wie schon erwähnt den Ableitungssatz im Originalbereich an, mit $f(t) = t^{3/2}$, also $f(0) = 0$:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}t^{3/2}\right)(s) = s\mathcal{L}(t^{3/2})(s) - 0 = s\mathcal{L}(t^{3/2})(s).$$

Die rechte Seite können wir mithilfe von Linearität und der Transformation von \sqrt{t} aus der Aufgabenstellung berechnen:

$$\mathcal{L}\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}\right)(s) = \frac{3}{2}\mathcal{L}(\sqrt{t})(s) = \frac{3}{2}\frac{\pi^{1/2}}{2s^{3/2}}.$$

Zusammen ergibt dies also:

$$s\mathcal{L}(t^{3/2})(s) = \frac{3}{2} \frac{\pi^{1/2}}{2s^{3/2}} \implies \mathcal{L}(t^{3/2})(s) = \frac{3\pi^{1/2}}{4s^{5/2}}.$$

2. Es gilt $\int_0^t \sqrt{u} du = \frac{2}{3}t^{3/2}$. Das heisst, wir können den Satz zur Integration im Originalbereich verwenden:

$$\mathcal{L}(t^{3/2})(s) = \mathcal{L}\left(\frac{3}{2} \int_0^t \sqrt{u} du\right)(s) = \frac{3}{2} \mathcal{L}\left(\int_0^t \sqrt{u} du\right)(s) = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{L}(\sqrt{t})(s)}{s} = \frac{3\pi^{1/2}}{4s^{5/2}}.$$

3. Es gilt $t^{3/2} = t \cdot \sqrt{t}$. Das heisst, wir können den Ableitungssatz im Bildbereich benutzen wie im vorherigen Beispiel:

$$\mathcal{L}(t^{3/2})(s) = -\mathcal{L}(-t \cdot \sqrt{t})(s) = -\mathcal{L}'(\sqrt{t})(s) = -\frac{d}{ds} \frac{\pi^{1/2}}{2s^{3/2}} = \frac{3\pi^{1/2}}{4s^{5/2}}.$$

Beispiel. Die Laplace Transformierte von $\sinh(t)$ ist $\mathcal{L}(\sinh(t))(s) = \frac{1}{s^2-1}$. Berechne die Laplace Transformierte von $\sinh(at)$.

Lösung. Wie im vorherigen Beispiel müssen wir einen Weg finden, wie wir $\sinh(at)$ zu $\sinh(t)$ verbinden. Hier können wir den Ähnlichkeitssatz mit $f(t) = \sinh(t)$ benutzen:

$$\mathcal{L}(\sinh(at))(s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(\sinh(t))\left(\frac{s}{a}\right).$$

Wir können nun die Transformation von $\sinh(t)$ aus der Aufgabenstellung verwenden:

$$\frac{1}{a} \mathcal{L}(\sinh(t))\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \frac{1}{(s/a)^2 - 1} = \frac{1}{a} \frac{a^2}{s^2 - a^2} = \frac{a}{s^2 - a^2},$$

wobei wir im zweitletzten Schritt den Bruch oben und unten mit a^2 multipliziert haben.

3.3 Faltung

Hier schauen wir uns das Konzept der Faltung an, als Vorbereitung für die nächsten beiden Kapitel.

3.3.1 Definition und Beispiel

Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Faltung definiert als:

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(u)g(t-u) du.$$

Eine Faltung ist also ein Integral zweier Funktionen f, g , das eine neue Funktion $(f * g)$ erzeugt. Sie erfüllt drei wichtige Eigenschaften:

1. $(f * g) = (g * f)$ (Kommutativität)
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$ (Assoziativität)

3. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ (Distributivität)

Die erste Eigenschaft (Kommutativität) sagt, dass wir im Integral die Funktionen f, g beliebig wechseln können. Das heisst

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du = \int_0^t g(u)f(t-u) du,$$

was uns die Berechnung des Integrals in einigen Fällen erheblich vereinfacht. Hier ein Beispiel dazu:

Beispiel. Sei $f(t) = e^t$, $g(t) = t^2$. Berechne die Faltung $(f * g)(t)$.

Lösung. Wir können entweder $(f * g)$ oder nach der Kommutativität $(g * f)$ berechnen. Wir fangen mal mit $(f * g)$ an:

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t f(u)g(t-u) du = \int_0^t e^u(t-u)^2 du = \int_0^t (t^2 - 2tu + u^2)e^u du \\ &= t^2 \int_0^t e^u du - 2t \int_0^t ue^u du + \int_0^t u^2 e^u du. \end{aligned}$$

Indem wir die drei Integrale mit partieller Integration oder einer Integrationstafel ausrechnen erhalten wir:

$$= t^2(e^t - 1) - 2t(te^t - e^t + 1) + (t^2e^t - 2te^t + 2e^t - 2) = 2e^t - t^2 - 2t - 2.$$

Wir wenden nun die Kommutativitätseigenschaft an, und vertauschen f und g im Integral:

$$(f * g)(t) = \int_0^t g(u)f(t-u) du = \int_0^t u^2 e^{t-u} du = \int_0^t u^2 e^t e^{-u} du = e^t \int_0^t u^2 e^{-u} du.$$

Jetzt müssen wir nur noch das eine Integral mit partieller Integration berechnen und erhalten das gleiche Resultat:

$$= e^t(-t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + 2) = 2e^t - t^2 - 2t - 2.$$

3.3.2 Faltungssatz

Der Grund, warum wir überhaupt Faltungen einführen, ist der Faltungssatz. Der gibt uns eine Verbindung zwischen den Laplace Transformierten zweier Funktionen f, g , und jener ihrer Faltung $(f * g)$:

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s).$$

Bemerkung. Wichtig ist, dass wir insbesondere also nicht $\mathcal{L}(f \cdot g)(s) = \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s)$ haben, ein relativ weit verbreiteter Fehler. Das heisst wir können den Satz nur anwenden für Multiplikationen von Funktionen im **Bildbereich**, und nicht im **Originalbereich**.

Dieser Satz wird sehr wichtig sein für die Rücktransformationen und Integral-Differentialgleichungen, weshalb wir hier noch ein Beispiel anschauen.

Beispiel. Sei $f(t) = t^2$, $g(t) = e^t$. Was ist die Transformierte der Faltung $\mathcal{L}(f * g)(s)$?

Lösung. Wir können den Faltungssatz verwenden:

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s).$$

Ausserdem wissen wir, dass $\mathcal{L}f(s) = \frac{2}{s^3}$ und $\mathcal{L}g(s) = \frac{1}{s-1}$ von der Tabelle. Also:

$$= \frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{2}{s^3(s-1)}.$$

Bemerke: Man kann dies auch explizit nachprüfen, indem wir stattdessen die Transformation von der schon berechneten Faltung $(f * g)(t) = 2e^t - t^2 - 2t - 2$ berechnen.

3.4 Rücktransformation

Bei der Laplace Rücktransformation wollen wir Funktionen im Bildbereich, also Funktionen der Form $F(s)$ ihre zugehörigen Funktionen im Originalbereich $f(t)$ zuordnen, so dass $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$. Dies können wir machen, indem wir die Laplace Transformaten von verschiedenen Funktionen $f(t)$ schon kennen (also z.B. von der Tabelle oder den bisherigen Beispielen) und dann Teile davon in der zu rücktransformierenden Funktion $F(s)$ wiedererkennen.

Das grundlegende Prinzip ist also irgendwie die Gleichung

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$$

zu erhalten, da dann die Rücktransformation genau $\mathcal{L}^{-1}F(s) = f(t)$.

3.4.1 Rücktransformation mit Rechenregeln

Einige Rücktransformationen kann man berechnen, indem man die Rechenregeln für die Laplace Transformation "rückwärts" auf $F(s)$ anwendet, um die Form $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$ zu bekommen.

Beispiel. Finde die Rücktransformierte von $F(s) = \frac{3}{(s+2)^2+9}$.

Lösung. Wir sehen eine Ähnlichkeit von $F(s)$ zu $\mathcal{L}(\sin(3t))(s) = \frac{3}{s^2+9}$. Der einzige Unterschied liegt darin, dass statt s ein $s + 2$ steht. Das heisst wir können $\mathcal{L}(\sin(3t))(s)$ statt bei s einfach bei $s + 2$ auswerten:

$$F(s) = \frac{3}{(s+2)^2+9} = \mathcal{L}(\sin(3t))(s+2).$$

Wir können nun den Dämpfungssatz "umgekehrt" anwenden und erhalten:

$$\mathcal{L}(\sin(3t))(s+2) = \mathcal{L}(e^{-2t} \sin(3t))(s),$$

also insgesamt:

$$F(s) = \mathcal{L}(e^{-2t} \sin(3t))(s),$$

wodurch wir genau die gesuchte Form erhalten haben und somit $\mathcal{L}^{-1}F(t) = e^{-2t} \sin(3t)$ für die Rücktransformierte folgern.

Beispiel. Finde die Rücktransformierte von $F(s) = \frac{6e^{-3s}}{s^4}$.

Lösung. Wir sehen eine Ähnlichkeit von $F(s)$ zu $\mathcal{L}(t^3)(s) = \frac{6}{s^4}$, mit dem Unterschied, dass noch ein Faktor e^{-3s} auftaucht. Das heisst wir haben:

$$F(s) = e^{-3s} \cdot \mathcal{L}(t^3)(s).$$

Den Term e^{-3s} können wir jedoch behandeln, indem wir die Verschiebung nach rechts "rückwärts" anwenden:

$$e^{-3s} \cdot \mathcal{L}(t^3)(s) = \mathcal{L}((t-3)^3 \cdot \Theta(t-3))(s),$$

d.h. insgesamt haben wir:

$$F(s) = \mathcal{L}((t-3)^3 \Theta(t-3))(s),$$

wodurch wir die gesuchte Form haben und somit $\mathcal{L}^{-1}F(t) = (t-3)^3 \Theta(t-3)$ gilt.

3.4.2 Rücktransformationen mit Faltungssatz

Falls $F(s)$ die Multiplikation zweier bekannter Laplace Transformierten ist, so können wir den Faltungssatz für die Rücktransformation benutzen.

Konkret: falls $F(s)$ die Form

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) \cdot \mathcal{L}(g(t))(s)$$

hat, dann gilt nach dem Faltungssatz

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) \cdot \mathcal{L}(g(t))(s) = \mathcal{L}(f * g)(s),$$

womit die gewünschte Form von $F(s) = \mathcal{L}(f * g)(s)$ erreicht ist. Das heisst es gilt $\mathcal{L}^{-1}F(t) = (f * g)(t)$ für die Rücktransformation.

Rezept. (Rücktransformation mit Faltung)

1. Identifiziere die zwei Faktoren in $F(s)$:

$$F(s) = \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s)$$

2. Finde die Rücktransformationen von den zwei Faktoren $\mathcal{L}f(s)$, $\mathcal{L}g(s)$, das heisst von welchen Funktionen $f(t)$, $g(t)$ sie stammen.

3. Der Faltungssatz gibt uns die Rücktransformation von $F(s)$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}(f * g)(s) \\ \implies \mathcal{L}^{-1}F(t) &= (f * g)(t). \end{aligned}$$

4. Nun musst du nur noch die Faltung berechnen:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$$

Beispiel. Berechne die Rücktransformation von $F(s) = \frac{1}{(s-1)s}$.

Lösung. Wir gehen genau nach dem Rezept vor:

1. Wir bemerken zuerst, dass $F(s)$ eine Multiplikation zweier (bekannter) Laplace Transformierten ist:

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)s} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s}.$$

2. Die beiden Faktoren erkennen wir als die Laplace Transformationen:

$$\frac{1}{s-1} = \mathcal{L}(e^t)(s), \quad \frac{1}{s} = \mathcal{L}(1)(s).$$

3. Somit können wir nun den Faltungssatz für $f(t) = e^t$, $g(t) = 1$ anwenden:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}(e^t)(s) \cdot \mathcal{L}(1)(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) \cdot \mathcal{L}(g(t))(s) = \mathcal{L}(f * g)(s) \\ \implies \mathcal{L}^{-1}F(t) &= (f * g)(t) \end{aligned}$$

4. Wir müssen also nur noch die Faltung ausrechnen:

$$\mathcal{L}^{-1}F(t) = (f * g)(t) = \int_0^t e^u \cdot 1 du.$$

Das Faltungsintegral ist hier besonders einfach, da $g(t) = 1$ bei $(t-u)$ ausgewertet

immer noch $g(t-u) = 1$ gibt. Indem wir das Integral ausrechnen erhalten wir:

$$\mathcal{L}^{-1}F(t) = \int_0^t e^u du = e^t - 1.$$

Beispiel. Berechne die Rücktransformation von $F(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4)}$.

Lösung. Wir gehen wieder genau nach dem Rezept vor:

1. Wir bemerken zuerst, dass $F(s)$ eine Multiplikation zweier (bekannter) Laplace Transformierten ist:

$$F(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{2}{s^2+4}.$$

2. Wir erkennen die zwei Faktoren als Laplace Transformationen:

$$\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}(t)(s), \quad \frac{2}{s^2+4} = \mathcal{L}(\sin(2t))(s).$$

3. Somit können wir den Faltungssatz für $f(t) = t$, $g(t) = \sin(2t)$ anwenden:

$$F(s) = \mathcal{L}(t)(s) \cdot \mathcal{L}(\sin(2t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) \cdot \mathcal{L}(g(t))(s) = \mathcal{L}(f * g)(s),$$

und es folgt

$$\mathcal{L}^{-1}F(t) = (f * g)(t) = \int_0^t u \sin(2(t-u)) du.$$

4. Wir müssen nur noch das Faltungsintegral mit partieller Integration ausrechnen, wodurch folgt:

$$\mathcal{L}^{-1}F(t) = \int_0^t u \sin(2(t-u)) du = \dots = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t).$$

3.4.3 Rücktransformationen mit Partialbruchzerlegung

Falls $F(s)$ eine gebrochenrationale Funktion ist, so können wir die Rücktransformation mit einer Partialbruchzerlegung berechnen. Konkret falls $F(s)$ die Form

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

hat für p, q Polynome und Grad von $p <$ Grad von q . Dann können wir die Partialbruchzerlegung auf $F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ anwenden, um $F(s)$ in eine Summe von Partialbrüchen umzuschreiben.

Diese Partialbrüche sind von der Form $\frac{1}{(s-\lambda)^{k+1}}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$. Ihre Rücktransformation können wir berechnen, indem wir jeweils den Dämpfungssatz "rückwärts" anwenden

(wie in einem Beispiel zuvor). Es gilt:

$$\frac{1}{(s-\lambda)^{k+1}} = \frac{1}{k!} \frac{k!}{(s-\lambda)^{k+1}} = \frac{1}{k!} \mathcal{L}(t^k)(s-\lambda),$$

wobei wir im letzten Schritt die bekannte Transformation $\mathcal{L}(t^k)(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}$ verwendet haben. Mit dem Dämpfungssatz folgt nun:

$$\frac{1}{k!} \mathcal{L}(t^k)(s-\lambda) = \frac{1}{k!} \mathcal{L}(t^k e^{\lambda t})(s) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{k!} t^k e^{\lambda t}\right)(s).$$

Das heisst, wir haben die Rücktransformation eines solchen Partialbruchs gefunden:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-\lambda)^{k+1}}\right)(t) = \frac{1}{k!} t^k e^{\lambda t}.$$

Rezept. (Rücktransformation mit Partialbruchzerlegung)

1. Wende die Partialbruchzerlegung auf $F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ an (siehe detailliertes Rezept im Mathe I Skript). D.h. wir finden

$$F(s) = \frac{A}{(s-\lambda_1)} + \frac{B}{(s-\lambda_2)} + \dots$$

2. Finde die Laplace Rücktransformation der Partialbrüche direkt mit der Tabelle oder mit der Formel

$$\frac{1}{(s-\lambda)^{k+1}} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{k!} t^k e^{\lambda t}\right)(s).$$

3. Benutze Linearität um $F(s)$ als eine grosse Laplace Transformation zu schreiben:

$$F(s) = \mathcal{L}(\dots)(s).$$

Dies liefert uns dann direkt die Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}F(t)$ als das (\dots) in der Klammer.

Beispiel. Berechne die Rücktransformation von $F(s) = \frac{1}{(s^2-1)s}$ mit PBZ.

Lösung. Wir gehen genau wie im Rezept vor:

1. Wir bemerken, dass wir genau in dem Fall sind, wo $F(s)$ als eine gebrochenrationale Funktion gegeben ist. Wir wenden also zuerst eine PBZ auf $F(s)$ an:

(a) Wir faktorisieren den Nenner in Linearfaktoren: $(s^2-1)s = (s+1)(s-1)s$.

(b) Wir schreiben die Summe der Partialbrüche mit Konstanten hin:

$$\frac{1}{(s^2-1)s} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s}.$$

(c) Wir multiplizieren beide Seiten mit $(s+1)(s-1)s$:

$$1 = A(s-1)s + B(s+1)s + C(s+1)(s-1)$$

(d) Wir schreiben die Gleichung um und machen einen Koeffizientenvergleich nach den Potenzen von s um die Konstanten A , B , C zu finden:

$$\begin{aligned} 1 &= A(s-1)s + B(s+1)s + C(s+1)(s-1) \\ \implies 1 &= s^2(A+B+C) + s(-A+B) - C \\ \implies 0 &= A+B+C, \quad 0 = -A+B, \quad -C = 1 \\ \implies A &= \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -1 \end{aligned}$$

(e) Das heisst wir haben die PBZ gefunden:

$$\frac{1}{(s^2-1)s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

2. Nun können wir die Rücktransformation relativ schnell finden, weil wir die Partialbrüche mit der oben erwähnten Formel als Laplace Transformationen schreiben können. In diesem Fall kennen wir sogar alle schon aus der Tabelle, und brauchen die Formel gar nicht. Es gilt:

$$\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}(e^{-t})(s), \quad \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}(e^t)(s), \quad \frac{1}{s} = \mathcal{L}(1)(s).$$

3. Das heisst, wir können mithilfe von Linearität das $F(s)$ als eine grosse Laplace Transformation schreiben:

$$F(s) = \frac{1}{(s^2-1)s} = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-t})(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^t)(s) - \mathcal{L}(1)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t - 1\right)(s)$$

Somit haben wir $F(s)$ in die gewünschte Form umgeschrieben und folgern $\mathcal{L}^{-1}F(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t - 1$.

Gute Übung: Diese Rücktransformation mit dem Faltungssatz berechnen, indem man $\frac{1}{(s^2-1)} = \mathcal{L}(\sinh(t))(s)$ erkennt (schnellerer Weg als mit PBZ).

Beispiel. Berechne die Rücktransformation von $F(s) = \frac{s^2-2}{(s+1)(s-1)^2}$ mit PBZ.

Lösung. Wir gehen wieder genau wie im Rezept vor:

1. Wir bemerken wieder, dass wir genau in dem Fall sind, wo $F(s)$ eine gebrochenrationale Funktion ist. Das heisst, wir wenden zuerst die PBZ auf $F(s)$ an:

(a) Der Nenner ist schon faktorisiert.

(b) Wir schreiben die Summe der Partialbrüche mit den Konstanten hin:

$$\frac{s^2-2}{(s+1)(s-1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}.$$

(c) Wir multiplizieren beide Seiten mit $(s+1)(s-1)^2$:

$$s^2 - 2 = A(s-1)^2 + B(s+1)(s-1) + C(s+1)$$

(d) Wir schreiben die Gleichung um und machen einen Koeffizientenvergleich nach den Potenzen von s um die Konstanten A , B , C zu finden:

$$\begin{aligned} s^2 - 2 &= s^2(A+B) + s(-2A+C) + A - B + C \\ \implies A+B &= 1, & -2A+C &= 0, & A-B+C &= -2 \\ \implies A &= -\frac{1}{4}, & B &= \frac{5}{4}, & C &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(e) Wir haben also die PBZ gefunden:

$$\frac{s^2 - 2}{(s+1)(s-1)^2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{s+1} + \frac{5}{4} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(s-1)^2}$$

2. Nun können wir wie vorhin die Partialbrüche als Laplace Transformationen von bekannten Funktionen schreiben bzw. die obige Formel verwenden:

$$\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}(e^{-t})(s), \quad \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}(e^t)(s), \quad \frac{1}{(s-1)^2} = \mathcal{L}(te^t)(s).$$

3. Mithilfe der Linearität können wir also $F(s)$ als eine grosse Laplace Transformation schreiben:

$$F(s) = -\frac{1}{4}\mathcal{L}(e^{-t})(s) + \frac{5}{4}\mathcal{L}(e^t)(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(te^t)(s) = \mathcal{L}\left(-\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{5}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t\right)(s),$$

$$\text{und folgern } \mathcal{L}^{-1}F(s) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{5}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t.$$

3.4.4 Allgemeine Rücktransformation

Falls man allgemein eine Rücktransformation einer Funktion $F(s)$ berechnen soll, muss man zwischen den oben erwähnten drei Methoden entscheiden. Ein möglicher Weg vorzugehen verläuft so:

1. Ist die Funktion $F(s)$ sofort ersichtlich als $\mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s)$? Dann benutzen wir den Faltungssatz für die Rücktransformation.
2. Ist stattdessen $F(s)$ eine gebrochenrationale Funktion?
 - (a) Ist die Rücktransformation sofort aus der Tabelle oder mit einfachen Rechenregeln ersichtlich? Falls ja: Führe die Rücktransformation aus.
 - (b) Falls nicht: PBZ für Rücktransformation.
3. Nun bleibt uns nur noch übrig, die Rücktransformation mit den Rechenregeln und bekannten, ähnlichen transformierten Funktionen zu berechnen.

3.5 Integral- und Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden wir die erlernten Methoden der Laplace Transformation endlich auf Differentialgleichungen und Integralgleichungen anwenden.

3.5.1 Inhomogene Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Homogene, lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung habt ihr schon in Kapitel 1.7 kennengelernt. Hier betrachten wir ähnliche Gleichungen, wobei nun ein inhomogener Term $g(t) \neq 0$ dazukommt und die Anfangsbedingungen $x(0), x'(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$ gegeben sind:

$$\begin{cases} a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = g(t), \\ x(0), x'(0), \dots, x^{(n-1)}(0) \text{ gegeben.} \end{cases}$$

Solche Differentialgleichungen, die mit ihren Anfangsbedingungen gegeben sind, nennen wir Anfangswertproblem (AWP). Diese AWP lassen sich nun mit der Laplace Transformation lösen.

Bemerkung: x und seine Ableitungen $x', \dots, x^{(n-1)}$ sind eigentlich Funktionen von t , d.h. $x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$. Deshalb können wir die Laplace Transformation auf sie anwenden.

Rezept. (Inhomogene Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung)

1. Wende die Laplace Transformation auf beide Seiten der Gleichung an und ziehe die Terme der Summe mit Linearität auseinander:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(a_n x^{(n)} + \dots + a_1 x' + a_0 x)(s) &= \mathcal{L}(g(t))(s) \\ \implies a_n \mathcal{L}(x^{(n)})(s) + \dots + a_1 \mathcal{L}(x')(s) + a_0 \mathcal{L}(x)(s) &= \mathcal{L}(g(t))(s)\end{aligned}$$

2. Benutze auf der linken Seite der Gleichung den Ableitungssatz im Originalbereich, um die Terme $\mathcal{L}(x^{(n)})(s)$, $\mathcal{L}(x^{(n-1)})(s)$, ..., $\mathcal{L}(x')(s)$ umzuschreiben:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x^{(n)})(s) &= s^n \mathcal{L}(x) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} x'(0) - \dots - s x^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0) \\ \mathcal{L}(x^{(n-1)})(s) &= s^{n-1} \mathcal{L}(x) - s^{n-2} x(0) - s^{n-3} x'(0) - \dots - s x^{(n-3)}(0) - x^{(n-2)}(0) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}(x')(s) &= s \mathcal{L}(x) - x(0)\end{aligned}$$

Setze hierbei die Werte für die Konstanten $x(0)$, $x'(0)$, ..., $x^{(n-1)}(0)$ aus der Aufgabenstellung ein.

3. Berechne die rechte Seite der Gleichung, also $\mathcal{L}(g(t))(s)$.
4. Setze nun Schritt 2. und 3. in die Gleichung aus 1. ein und forme nach $\mathcal{L}(x(t))(s)$ um. Wir erhalten so die Gleichung

$$\mathcal{L}(x(t))(s) = \text{irgendeine gebrochenrationale Funktion.}$$

5. Berechne die Rücktransformation der gebrochenrationalen Funktion aus 4., dies gibt genau die Lösung $x(t)$.

Bemerkung: Da wir eine gebrochenrationale Funktion haben, werden wir hier oft mit der PBZ die Rücktransformation berechnen.

Beispiel. Berechne die Lösung folgender 1-ten Ordnung Differentialgleichung:

$$\begin{cases} x' - 2x &= te^{-t} \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

Lösung. Wir gehen wie im Rezept vor:

1. Wir wenden auf beide Seiten der Gleichung die Laplace Transformation an und benutzen Linearität:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x' - 2x)(s) &= \mathcal{L}(te^{-t})(s) \\ \implies \mathcal{L}(x')(s) - 2\mathcal{L}(x)(s) &= \mathcal{L}(te^{-t})(s).\end{aligned}$$

2. Wir benutzen den Ableitungssatz auf der linken Seite. Hier haben wir nur einen Term

den wir behandeln müssen, nämlich $\mathcal{L}(x')(s)$:

$$\mathcal{L}(x')(s) = s\mathcal{L}(x)(s) - x(0).$$

Indem wir noch die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ einsetzen erhalten wir:

$$\mathcal{L}(x')(s) = s\mathcal{L}(x)(s)$$

3. Nun berechnen wir die rechte Seite der Gleichung, also $\mathcal{L}(te^{-t})(s)$. Dafür benutzen wir den Dämpfungssatz:

$$\mathcal{L}(te^{-t})(s) = \mathcal{L}(t)(s+1) = \frac{1}{(s+1)^2},$$

wobei wir in der letzten Gleichheit die bekannte Transformation $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$ verwendet haben.

4. Nun setzen wir die Schritte 2. und 3. in die Gleichung aus 1. ein:

$$s\mathcal{L}(x)(s) - 2\mathcal{L}(x)(s) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Dies können wir nach $\mathcal{L}(x)(s)$ umformen, indem wir $\mathcal{L}(x)(s)$ auf der linken Seite ausklammern:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)(s) \cdot (s-2) &= \frac{1}{(s+1)^2} \\ \implies \mathcal{L}(x)(s) &= \frac{1}{(s-2)(s+1)^2}. \end{aligned}$$

5. Für die Rücktransformation von $\frac{1}{(s-2)(s+1)^2}$ benutzen wir die Partialbruchzerlegung (man könnte sie auch mit dem Faltungssatz ausrechnen, gute Übung!). Wir gehen bei der Rücktransformation auch nach dem Rezept von vorhin vor:

(a) Die PBZ von $\frac{1}{(s-2)(s+1)^2}$ ist gegeben als (Übung):

$$\frac{1}{(s-2)(s+1)^2} = \frac{1}{9} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{9} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{(s+1)^2}.$$

(b) Die Rücktransformationen der einzelnen Partialbrüche können wir mit der Tabelle oder Formel berechnen zu:

$$\frac{1}{s-2} = \mathcal{L}(e^{2t})(s), \quad \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}(e^{-t})(s), \quad \frac{1}{(s+1)^2} = \mathcal{L}(te^{-t})(s)$$

(c) Diese können wir in die PBZ von oben einfügen und erhalten als grosse Laplace Transformation:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-2)(s+1)^2} &= \frac{1}{9}\mathcal{L}(e^{2t})(s) - \frac{1}{9}\mathcal{L}(e^{-t})(s) - \frac{1}{3}\mathcal{L}(te^{-t})(s) \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{9}e^{2t} - \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{3}te^{-t}\right)(s) \end{aligned}$$

Somit haben wir die Rücktransformation von $\mathcal{L}(x(t))(s)$ gefunden, also $x(t)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)(s+1)^2}\right)(t) = x(t) = \frac{1}{9}e^{2t} - \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{3}te^{-t}.$$

Beispiel. Berechne die Lösung $x(t)$ des folgenden AWP:

$$\begin{cases} x'' + 4x &= \sin(t) \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 0 \end{cases}$$

Lösung. Wir gehen wie im Rezept vor:

1. Wie wenden auf beide Seiten der Gleichung die Laplace Transformation an und benutzen Linearität:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x'' + 4x)(s) &= \mathcal{L}(\sin(t))(s) \\ \implies \mathcal{L}(x'')(s) + 4\mathcal{L}(x)(s) &= \mathcal{L}(\sin(t))(s). \end{aligned}$$

2. Wir benutzen den Ableitungssatz auf der linken Seite und setzen die Anfangsbedingungen ein. Hier haben wir nur einen Term mit Ableitung zu behandeln:

$$\mathcal{L}(x'')(s) = s^2\mathcal{L}(x)(s) - sx(0) - x'(0) = s^2\mathcal{L}(x)(s) - s.$$

3. Nun berechnen wir $\mathcal{L}(g(t))(s)$, was hier bekannt ist aus der Tabelle:

$$\mathcal{L}(\sin(t))(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

4. Wir setzen die Schritte 2. und 3. in die Gleichung aus 1. ein und formen um nach $\mathcal{L}(x)(s)$:

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}(x)(s) - s + 4\mathcal{L}(x)(s) &= \frac{1}{s^2 + 1} \\ \implies \mathcal{L}(x)(s) \cdot (s^2 + 4) &= \frac{1}{s^2 + 1} + s \\ \implies \mathcal{L}(x)(s) &= \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} + \frac{s}{s^2 + 4}. \end{aligned}$$

5. Nun müssen wir die Rücktransformation von $\mathcal{L}(x)(s)$ berechnen. Dafür berechnen wir zuerst die Rücktransformation von $\frac{s}{s^2+4}$ und danach von $\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$.

Die Rücktransformation von $\frac{s}{s^2+4}$ kennen wir schon direkt aus der Tabelle, es gilt nämlich:

$$\frac{s}{s^2 + 4} = \mathcal{L}(\cos(2t))(s).$$

Für die Rücktransformation vom zweiten Term benutzen wir den Faltungssatz, ganz nach Rezept:

(a) Wir bemerken, dass $\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$ ein Produkt zweier bekannter Laplace Transformationen ist:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+4}.$$

(b) Wir identifizieren die beiden Terme als Transformationen von Funktionen aus der Tabelle:

$$\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}(\sin(t))(s), \quad \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{2} \frac{2}{s^2+4} = \frac{1}{2} \mathcal{L}(\sin(2t))(s) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right)(s)$$

(c) Wir haben also:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \mathcal{L}(\sin(t))(s) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right)(s) = \mathcal{L}(f * g)(s),$$

für $f(t) = \sin(t)$, $g(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$. Die Rücktransformation ist also gegeben als

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) = (f * g)(t).$$

(d) Wir müssen nur noch das Faltungsintegral berechnen:

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t \sin(u) \cdot \frac{1}{2} \sin(2(t-u)) du = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{2} (\cos(3u-2t) - \cos(2t-u)) du \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_0^t \cos(3u-2t) du - \int_0^t \cos(2t-u) du \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin(3u-2t) \Big|_0^t + \sin(2t-u) \Big|_0^t \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} (\sin(t) - \sin(-2t)) + \sin(t) - \sin(2t) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \sin(t) - \frac{2}{3} \sin(2t) \right) \\ &= \frac{1}{3} \sin(t) - \frac{1}{6} \sin(2t) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in der ersten Zeile die Identität $\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$ verwendet, sowie in der 4. Zeile $-\sin(-2t) = \sin(2t)$, da der Sinus ungerade ist.

Nach der relativ langwieriger Rücktransformation sind wir nun aber am Schlussergebnis angelangt, indem wir die beiden Rücktransformationen zusammensetzen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)(s) &= \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{s}{s^2+4} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{3} \sin(t) - \frac{1}{6} \sin(2t)\right)(s) + \mathcal{L}(\cos(2t))(s) \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{3} \sin(t) - \frac{1}{6} \sin(2t) + \cos(2t)\right)(s). \end{aligned}$$

Somit folgt also $x(t) = \frac{1}{3} \sin(t) - \frac{1}{6} \sin(2t) + \cos(2t)$.

3.5.2 Integralgleichungen

Mit Integralgleichungen bezeichnen wir Gleichungen, die ähnlich wie die n -te Ordnung Differentialgleichung aufgebaut sind, aber nicht nur Ableitungen von der gesuchten Funktion $x(t)$, sondern auch noch Integrale mit $x(t)$ enthalten. Unser Beispiel hier ist die Gleichung:

$$\int_0^t x(u)(t-u)^2 du = t^4.$$

In diesem Fall haben wir auf der rechten Seite keine Ableitungen, sondern nur ein Integral mit $x(t)$ drin. Wie können wir dies nun lösen?

Der erste Schritt ist, dass wir das Integral als ein Faltungsintegral zweier Funktionen identifizieren. Da ein Faltungsintegral die Form

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$$

haben muss, erkennen wir das Integral in der Integralgleichung als eine Faltung mit $f(t) = x(t)$, $g(t) = t^2$. Dann folgt nämlich genau $f(u) = x(u)$ und $g(t-u) = (t-u)^2$.

Der Trick ist also, dass wir alle Terme im Integral mit nur u als Argument zu einem $f(t)$ zusammennehmen, und alle Terme mit einem $(t-u)$ als Argument zu $g(t)$ zusammenfassen.

In diesem Fall haben wir also mit der Identifikation als Faltung die Integralgleichung reduziert zur Form

$$(f * g)(t) = t^4$$

mit $f(t) = x(t)$ und $g(t) = t^2$. Jetzt können wir auf beide Seiten die Laplace Transformation anwenden und den Faltungssatz anwenden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(s) &= \mathcal{L}(t^4)(s) \\ \implies \mathcal{L}(f(t))(s) \cdot \mathcal{L}(g(t))(s) &= \mathcal{L}(t^4)(s). \end{aligned}$$

Nun können wir $f(t) = x(t)$, $g(t) = t^2$ einsetzen, und die bekannten Transformationen $\mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}$, $\mathcal{L}(t^4)(s) = \frac{24}{s^5}$ benutzen und umformen::

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t))(s) \cdot \mathcal{L}(t^2)(s) &= \mathcal{L}(t^4)(s) \\ \implies \mathcal{L}(x(t))(s) \cdot \frac{2}{s^3} &= \frac{24}{s^5} \\ \implies \mathcal{L}(x(t))(s) &= \frac{12}{s^2}. \end{aligned}$$

Schlussendlich müssen wir nur noch davon die Rücktransformation berechnen, was in diesem Fall aus der Tabelle ersichtlich ist:

$$\frac{12}{s^2} = 12 \frac{1}{s^2} = 12\mathcal{L}(t)(s) = \mathcal{L}(12t)(s).$$

Es folgt also für die Lösung $x(t) = 12t$. Hieraus lässt sich ein allgemeines Rezept formulieren, auch für den Fall wo nebst Integralen auch Ableitungen auf der rechten Seite auftauchen.

Rezept. (Integro-Differentialgleichungen)

1. Identifiziere das Integral in der Gleichung als ein Faltungsintegral. Das heisst identifiziere die Funktionen $f(t)$, $g(t)$ durch Vergleich mit

$$\int_0^t f(u)g(t-u) du$$

2. Wende auf beide Seiten der Gleichung die Laplace Transformation an, benutze Linearität wie bei den Differentialgleichungen. Benutze den Faltungssatz um die Transformation des Integrals umzuschreiben mit:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t (\dots) du\right)(s) = \mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s)$$

3. Falls Ableitungen vorkommen: Benutze den Ableitungssatz im Originalbereich zusammen mit den Anfangsbedingungen, wie bei den Differentialgleichungen.
4. Berechne $\mathcal{L}f(s)$ falls $g(t) = x(t)$ gilt, sonst $\mathcal{L}g(s)$ falls $f(t) = x(t)$ gilt. Berechne zudem die Laplace Transformation des inhomogenen Teils der Gleichung (d.h. des rechten Teils).
5. Setze die Schritte 3. und 4. in die Gleichung aus 2. ein und löse nach $\mathcal{L}(x(t))(s)$ auf, so dass ihr die folgende Form bekommt:

$$\mathcal{L}(x(t))(s) = \text{irgendeine Funktion}$$

6. Berechnet die Rücktransformation von der obigen Gleichung, dies gibt euch genau die Lösung $x(t)$.

Beispiel. Berechne die Lösung $x(t)$ der Integro-Differentialgleichung

$$x'(t) + \int_0^t e^{2(t-u)}x(u) du = e^{2t}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$.

Lösung. Wir gehen ganz nach dem Rezept vor.

1. Zuerst identifizieren wir das Integral als eine Faltung, indem wir es vergleichen mit

$$\int_0^t f(u)g(t-u) du.$$

In diesem Fall sehen wir, dass $f(t) = x(t)$, $g(t) = e^{2t}$ funktioniert. Das heisst, wir können unsere Gleichung schreiben als

$$x'(t) + (f * g)(t) = e^{2t}.$$

2. Wir wenden nun auf beiden Seiten die Laplace Transformation an und benutzen Linearität um die Terme zu trennen:

$$\mathcal{L}(x'(t))(s) + \mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(e^{2t})(s).$$

Mit dem Faltungssatz und dem Wiedereinsetzen von $f(t) = x(t)$, $g(t) = e^{2t}$ bekommen wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x'(t))(s) + \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s) &= \mathcal{L}(e^{2t})(s) \\ \implies \mathcal{L}(x'(t))(s) + \mathcal{L}(x(t))(s) \cdot \mathcal{L}(e^{2t})(s) &= \mathcal{L}(e^{2t})(s) \end{aligned}$$

3. Nun benutzen wir den Ableitungssatz für den einen Term mit der Ableitung $\mathcal{L}(x'(t))(s)$ und setzen die Anfangsbedingung ein:

$$\mathcal{L}(x'(t))(s) = s\mathcal{L}(x(t))(s) - x(0) = s\mathcal{L}(x(t))(s)$$

4. Wir berechnen $\mathcal{L}(g(t))(s) = \mathcal{L}(e^{2t})(s)$, den Term aus der Faltung der nicht $x(t)$ ist. Diese Transformation kennen wir aber aus der Tabelle, es gilt $\mathcal{L}(e^{2t})(s) = \frac{1}{s-2}$.

In diesem Fall ist auch der inhomogene Term e^{2t} , und seine Laplace Transformation auch $\mathcal{L}(e^{2t})(s) = \frac{1}{s-2}$.

5. Wir setzen die Schritte 3. und 4. in die Gleichung aus 2. ein und formen sie um:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}(x(t))(s) + \mathcal{L}(x(t))(s) \cdot \frac{1}{s-2} &= \frac{1}{s-2} \\ \implies \mathcal{L}(x(t))(s) \left(s + \frac{1}{s-2} \right) &= \frac{1}{s-2} \\ \implies \mathcal{L}(x(t))(s) \cdot \frac{s^2 - 2s + 1}{s-2} &= \frac{1}{s-2} \\ \implies \mathcal{L}(x(t))(s) &= \frac{1}{s^2 - 2s + 1} = \frac{1}{(s-1)^2} \end{aligned}$$

6. Nun müssen wir nur noch die Rücktransformation davon berechnen. In diesem Fall können wir dies einfach mit dem Dämpfungssatz und der bekannten Transformation $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$ machen:

$$\frac{1}{(s-1)^2} = \mathcal{L}(t)(s-1) = \mathcal{L}(te^t)(s).$$

Das heisst, wir haben die Lösung $x(t) = te^t$ gefunden.

4 Partielle Differentialgleichungen

Wichtige Kapitel aus Mathematik I und II: Kapitel 6.2 und 6.4, Kapitel 7.1-7.3 und Kapitel 9.3 - 9.4. Es ist wichtig, dass du vor diesem Kapitel das Kapitel zu Fourier-Reihen gut verstanden hast.

4.1 Definition und Randbedingungen

Bis jetzt haben wir uns in der Mathematik nur Differentialgleichungen angeschaut, die von einer Variable abhängig sind. Ein Beispiel davon ist

$$\begin{aligned}y'(t) &= ty(t) \\ y(0) &= 0\end{aligned}$$

wobei hier die Differentialgleichung nur von der Zeit t abhängt. Wir nennen die Bedingung $y(0) = 0$ eine Anfangsbedingung, welche uns später hilft, gegebenenfalls Konstanten zu berechnen welche durch eine allgemeine Lösung der DGL entstanden ist. Eine DGL welche von einer Variable abhängt nennen wir eine "gewöhnliche" Differentialgleichung (ODE, ordinary differential equation). In der Natur haben wir aber häufig Funktionen, welche nicht nur von einer Variable abhängig sind. Ein gutes Beispiel dafür ist die Temperatur. Diese kann beispielsweise sowohl von der Zeit t abhängig sein, als auch vom Ort x , also $T(x, t)$. Um die Temperaturentwicklung in einem Gebiet Ω beschreiben zu können, brauchen wir ebenfalls Differentialgleichungen. Da unsere Funktion aber nun von zwei Variablen abhängig ist, erhalten wir eine sogenannte partielle Differentialgleichung (PDE). Ein Beispiel einer solchen PDE wäre

$$\begin{aligned}T_t(x, t) &= T_{xx}(x, t) \\ T(x, 0) &= 37 \\ T(x, t) &= 3xt^2, \quad x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

Dabei ist $T_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}T(x, t)$ und somit auch $T_{xx}(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x, t)$. Mit $\partial\Omega$ meinen wir den Rand des Gebiets Ω und nennen deswegen die letzte Bedingung auch Randbedingung. Die Bedingung $T(x, 0) = 37$ nennen wir weiterhin eine Anfangsbedingung. In diesem Kapitel lernen wir nun einige Methoden, mit denen wir PDEs dieser Art lösen können.

4.2 Fouriermethode

4.2.1 Separationsansatz

In der folgenden Methode werden wir zunächst den sogenannten Separationsansatz gebrauchen. Dabei schreiben wir unsere Funktion $u(x, t)$ welche von zwei Variablen abhängig ist als das Produkt zweier Funktionen $X(x)$ und $T(t)$, welche jeweils nur von einer Variable abhängig sind, also

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Wieso ist dieser Ansatz nützlich für unsere PDEs? Schauen wir uns folgendes Beispiel an:

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \\u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] \\u(x + 2\pi, t) &= u(x, t)\end{aligned}$$

Wir benützen den Separationsansatz und erhalten

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Nun setzen wir diesen Ansatz in unsere PDE ein und erhalten

$$\frac{d}{dt}X(x)T(t) = \frac{d^2}{dx^2}X(x)T(t)$$

Da $X(x)$ nicht von t abhängig ist, können wir dieses vor die Ableitung stellen und das gleiche auch für $T(t)$ auf der rechten Seite tun. Dann erhalten wir

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

Wir bringen nun alles was mit t zu tun hat auf die linke, und alles was mit x zu tun hat auf die rechte Seite:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Was hat uns das nun gebracht? Die linke Seite ist nur von t abhängig, während die rechte Seite nur von x abhängig ist. Aber damit beide Seiten gleich sind, müssen beide Seiten konstant sein. Denn etwas was von x abhängig ist, kann nicht gleich sein, wie etwas was von t abhängig ist. Wir wählen die Konstante $c := -w^2$ (wird später erklärt wieso genau das negative Vorzeichen und die Potenz) sodass

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -w^2$$

Nun können wir zwei neue gewöhnliche Differentialgleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned}T'(t) &= -w^2T(t) \\X''(x) &= -w^2X(x)\end{aligned}$$

Die erste DGL ergibt die Lösung

$$T(t) = Ce^{-w^2t}$$

und die zweite DGL ergibt (mit bekannten Methoden):

$$X(x) = \tilde{A} \sin(wx) + \tilde{B} \cos wx$$

Die Bedingung $c = -w^2$ haben wir wegen dieser zweiten DGL gewählt. Hätten wir c positiv gewählt, so wäre keine periodische Funktion $X(x)$ entstanden. Dies ist aber wegen

der letzten Bedingung (Randbedingung) nötig. Das Quadrat wählen wir so, damit wir im \sin oder \cos keine Wurzel stehen haben. Wir haben die Periode 2π genau dann, wenn $w = 2\pi n/L$ ist (wobei L die Periode ist) also in unserem Fall $w = n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten also

$$u(x, t) = X(x)T(t) = (\tilde{A} \sin(nx) + \tilde{B} \cos(nx))Ce^{-n^2 t}$$

Man kann nun das ganze vereinfachen, indem man $A := \tilde{A} \cdot C$ neudefiniert und $B := \tilde{B} \cdot C$ ebenfalls. Wir erhalten dann

$$u(x, t) = (A \sin(nx) + B \cos(nx))e^{-n^2 t}$$

und nennen diese Lösung unsere "Basislösung".

4.2.2 Superposition

Da die PDE und die Randbedingungen **linear und homogen** sind, können wir aber auch eine sogenannte Superposition von unseren Basislösungen haben (für verschiedene n). Eine Superposition ist einfach die Summe verschiedener Basislösungen. Die allgemeine Lösung ist daher gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx))e^{-n^2 t}$$

Unsere Randbedingung haben wir schon genutzt. Nun möchten wir noch unsere Anfangsbedingung brauchen, um A_n und B_n zu bestimmen. Wir setzen $t = 0$ in unsere allgemeine Lösung ein und erhalten

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx)) \stackrel{!}{=} f(x)$$

Diese Reihe kennen wir aus dem Kapitel der Fourierreihen. Dies **ist** eine Fourierreihe. Die A_n und B_n sind genau die Fourierkoeffizienten von $f(x)$. Wir haben also die Konstanten berechnet durch die Fourierreihe von $f(x)$ und erhalten somit unsere Lösung $u(x, t)$.

4.2.3 Rezept

Rezept. (Lösen einer PDE mithilfe der Fouriermethode)

1. Separationsansatz: Teile $u(x, t)$ auf in ein Produkt zweier Funktionen $X(x)$ und $T(t)$, also

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

und setze dies in die PDE ein.

2. Stelle die PDE nun so um, dass du auf einer Seite alles mit $X(x)$ und seinen Ableitungen hast und auf der anderen Seite $T(t)$.
3. Setze dann beide Seiten gleich einer Konstanten $-w^2$ falls zweite Ableitungen vorkommen, und sonst einfach gleich der Konstante c .
4. Du erhältst nun zwei ODE welche du lösen kannst. Im Allgemeinen helfen folgende zwei Lösungsansätze:

$$\begin{aligned} g'(t) = ag(t) &\implies g(t) = Ce^{at} \\ f''(x) = -w^2 f(x) &\implies f(x) = A \sin(wx) + B \cos(wx) \end{aligned}$$

5. Mache Gebrauch von deiner Randbedingung. Falls beispielsweise $u(0, t) = 0$ ein Randbedingung ist, dann untersuche nur $X(0) = 0$ und finde so w beziehungsweise c . Die Konstante w sollte von $n \in \mathbb{N}$ abhängig sein.
6. Die Basislösung ist dann $u(x, t) = X(x)T(t)$. Schaue nun, ob du Konstanten zusammenführen kannst. Vor allem Konstanten der Form $A \cdot C$ können zu einer Konstanten fusioniert werden. Falls die PDE **linear und homogen** ist, so müssen wir für die allgemeine Lösung eine Superposition der Basislösungen erstellen. Die allgemeine Lösung ist

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$$

wobei die Koeffizienten $A \rightarrow A_n$ nun von n abhängig gemacht werden.

7. Berechne die Fourierreihe der Anfangsbedingung. Falls du in der Basislösung $u(x, t)$ nur Sinus-Funktionen stehen hast, dann erweitere zuerst die Anfangsbedingung zu einer ungeraden Funktion. Falls nur Cosinus-Funktionen vorkommen, erweiterst du die Anfangsbedingung zu einer geraden Funktion.
8. Stelle nun die allgemeine Lösung mit der Anfangsbedingung (meist $t = 0$) gleich der Fourierreihe der Anfangsbedingung und berechne so die Konstanten A_n , B_n (=Fourierkoeffizienten):

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X(x)T(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \dots = \text{Fourierreihe von Anfangsbedingung}$$

4.2.4 Beispiele

Beispiel. Löse die folgende partielle Differentialgleichung nach $u(x, y)$ auf:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u(x, 0) = 2 \sin(2x) + 4 \sin(5x) \quad (\text{AB})$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad (\text{RB})$$

$$u_y(x, 0) = 0 \quad (\text{RB})$$

Lösung. Wir gehen nach dem Rezept vor:

1. Sei also $u(x, y) = X(x)Y(y)$, dann gilt eingesetzt in die PDE

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

2. Wir stellen die Gleichung um und erhalten:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

3. Wir setzen die Gleichung gleich eine Konstante $-w^2$ und erhalten somit:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -w^2$$

4. Dies können wir nun gebrauchen, um zwei einzelne ODEs aufzustellen:

$$X''(x) = -w^2 X(x)$$

$$Y''(y) = w^2 Y(y)$$

Die erste Gleichung ergibt die Lösung:

$$X(x) = A \sin(wx) + B \cos(wx)$$

und die zweite Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Mit bekannten Methoden aus Mathematik I erhalten wir

$$Y(y) = C e^{wy} + D e^{-wy}$$

5. Wir setzen nun die Randbedingung $u(0, y) = 0$ ein und erhalten:

$$X(0) = B = 0$$

Da ausserdem $\sin(w\pi) = 0$ gilt, erhalten wir $w = n$ wobei $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$X(x) = A \sin(nx).$$

Aus der zweiten Randbedingung erhalten wir

$$Y'(y) = 0 = n(C - D) \implies D = C$$

6. Die Basislösung ist

$$u(x, y) = C(e^{ny} + e^{-ny}) \sin(nx)$$

wobei wir AC zu einer Konstanten C zusammengeführt haben. Die allgemeine Lösung ist

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (e^{ny} + e^{-ny}) \sin(nx)$$

7. Dieser Schritt kann hier übersprungen werden, da $2 \sin(2x) + 4 \sin(5x)$ schon in "Fourier-Reihen"-Form ist.

8. Wir setzen nun die Anfangsbedingung ein und erhalten

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot C_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} 2 \sin(2x) + 4 \sin(5x)$$

Wie wir sehen, bleiben nur $n = 2$ und $n = 5$ übrig und somit $C_n = 0$ für alle $n \neq 2, 5$ und $C_2 = 1$ bzw. $C_5 = 2$ (Hälfte, da wir einen Faktor von 2 haben. Zusammensetzen von allem ergibt dann die Lösung

$$u(x, y) = (e^{2y} + e^{-2y}) \sin(2x) + 2(e^{5y} + e^{-5y}) \sin(5x).$$

Beispiel. Löse die folgende partielle Differentialgleichung nach $u(x, y)$ auf:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -u_t \\ u(x, 0) &= 1, \quad \forall x \in [0, \pi) \text{ (AB)} \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \text{ (RB)} \end{aligned}$$

Lösung. Wir gehen nach dem Rezept vor:

1. Sei also $u(x, t) = X(x)T(t)$, dann gilt eingesetzt in die PDE

$$X''(x)T(t) = -X(x)T'(t)$$

2. Wir stellen die Gleichung um und erhalten:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{T(t)}$$

3. Wir setzen die Gleichung gleich eine Konstante $-w^2$ und erhalten somit:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{T(t)} = -w^2$$

4. Dies können wir nun gebrauchen, um zwei einzelne ODEs aufzustellen:

$$\begin{aligned} X''(x) &= -w^2 X(x) \\ T'(t) &= w^2 T(t) \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ergibt die Lösung:

$$X(x) = A \sin(wx) + B \cos(wx)$$

und die zweite Gleichung ergibt

$$T(t) = C e^{w^2 t}$$

5. Wir setzen nun die Randbedingung $u(0, t) = 0$ ein und erhalten:

$$X(0) = B = 0$$

Da ausserdem $\sin(w\pi) = 0$ gilt, erhalten wir $w = n$ wobei $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$X(x) = A \sin(nx).$$

6. Die Basislösung ist

$$u(x, y) = C e^{n^2 t} \sin(nx)$$

wobei wir AC zu einer Konstanten C zusammengeführt haben. Die allgemeine Lösung ist

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{n^2 t} \sin(nx)$$

7. Damit wir C_n bestimmen können, müssen wir die Funktion $\tilde{f}(x) = 1$ irgendwie als Fourierreihe darstellen können. Wir bemerken, dass nur $\sin(nx)$ in der allgemeinen Lösung vorkommt und somit müssen wir 1 als ungerade Funktion periodisch fortsetzen, also

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi) \\ -1 & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Da die Funktion ungerade ist, ist $a_n = 0$ und wir müssen nur b_n ausrechnen:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx \\ &= \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \end{aligned}$$

wobei wir die Tricks aus dem Kapitel der Fourier-Reihen benutzt haben.

8. Die Anfangsbedingung lautet

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin(nx)$$

es gilt also $C_n = b_n = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}$ und somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} e^{n^2 t} \sin(nx).$$

Alternativ kann beim Fourierkoeffizienten auch eine Fallunterscheidung durchgeführt werden, also:

$$\frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann erhält man die Fourierreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x)$$

und somit

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x) e^{(2n+1)^2 t}.$$

4.3 Laplace-Gleichung

Die Laplace Gleichung ist eine Gleichung der Form

$$\Delta u(x, y) = 0$$

Funktionen, welche diese Gleichung erfüllen, nennen wir **harmonische Funktionen**. Der Laplace-Operator Δ ist dabei in kartesischen Koordinaten wie folgt definiert:

$$\Delta u(x, y) = \partial_{xx}u(x, y) + \partial_{yy}u(x, y)$$

In Polarkoordinaten (also für $x = r \cos(\varphi)$ und $y = r \sin(\varphi)$) ist der Laplace-Operator

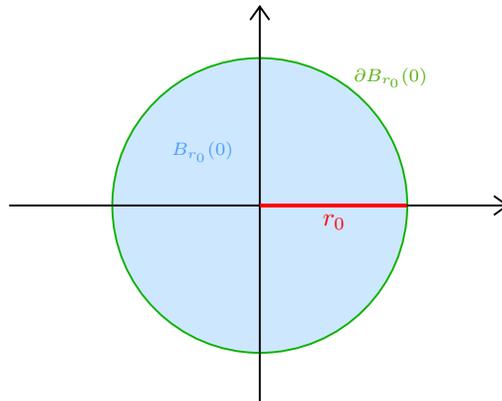
$$\Delta u(r, \varphi) = \partial_{rr}u(r, \varphi) + \frac{1}{r}\partial_r u(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}u(r, \varphi)$$

4.3.1 Wärmeleitgleichung auf einer Scheibe

Die Wärmeleitung auf einer Scheibe kann durch die Laplace-Gleichung beschrieben werden. Wir erhalten eine PDE der folgenden Form:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \varphi) = 0 & \text{in } B_{r_0}(0) \\ u(r_0, \varphi) = \xi(\varphi) & \text{auf } \partial B_{r_0}(0) \end{cases}$$

Dabei ist $B_{r_0}(0)$ genau die Kreisscheibe um den Nullpunkt mit Radius r_0 und $\partial B_{r_0}(0)$ ist der Rand dieser Kreisscheibe (also einfach der Kreis um den Nullpunkt mit Radius r_0).



Wir können diese Gleichung mit dem Separationsansatz lösen. Dies tun wir hier nicht ausführlich. Wir finden aber für harmonische Funktionen (also Funktionen welche genau diese Laplace-Gleichung mit der Randbedingung lösen) folgende zwei wichtige Sätze:

Mittelwertseigenschaft Es gilt der folgende wichtige Satz für harmonische Funktionen:

Merken. Die harmonische Funktion $u(r, \varphi)$ hat im Mittelpunkt der Kreisscheibe (also bei $r = 0$) den Wert

$$u(0, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\varphi) d\varphi$$

Die ist genau der Mittelwert von u auf dem Rand der Kreisscheibe.

Maximumsprinzip Nimmt eine harmonische Funktion ihr Maximum im Inneren der Kreisscheibe an, so ist die Funktion konstant. Implizit bedeutet dies:

Merken. Eine harmonische Funktion nimmt ihr Maximum immer auf dem Rand an. Es gilt also

$$\max_{(r, \varphi) \in B_{r_0}(0)} u(r, \varphi) = \max_{(r, \varphi) \in \partial B_{r_0}(0)} u(r, \varphi) = \max_{\varphi \in [0, 2\pi)} \xi(\varphi)$$

Will man also das Maximum einer Funktion bestimmen, welche die Laplace-Gleichung erfüllt, so bestimmt man einfach das Maximum von $\xi(\varphi)$.

Beispiel. Es sei die folgende PDE gegeben

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{in } B_1(0) \\ u(x, y) = \sqrt{1-x^2} + x & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

Bestimme $u(0, 0)$ und das Maximum von $u(x, y)$.

Lösung. Da wir auf einer Kreisscheibe arbeiten, müssen wir zunächst alles in Polarkoordinaten übersetzen. Mit der Mittelwertseigenschaft und dem Maximumsprinzip müssen wir nur $\xi(x, y)$ in Polarkoordinaten übersetzen. Dazu haben wir $x = r \cos(\varphi)$ und $y = r \sin(\varphi)$. Da $\xi(x, y)$ auf $r = 1$ die Randbedingung ist, können wir direkt $r = 1$ setzen und erhalten:

$$\xi(\varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} + \cos(\varphi) = \sin(\varphi) + \cos(\varphi)$$

Wir bestimmen nun $u(0, 0)$. Das ist genau der Wert der Funktion am Nullpunkt, also bei $r = 0$ und wir können die Mittelwertseigenschaft nutzen:

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) + \cos(\varphi) d\varphi = 0.$$

Nun zum Maximum der Funktion. Das Maximum wird auf dem Rand angenommen. Das Maximum der Funktion $\xi(\varphi)$ bestimmen wir wie gewohnt:

$$\partial_\varphi \xi(\varphi) = \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \stackrel{!}{=} 0$$

Dies ist genau dann $\sin(\varphi) = \cos(\varphi)$ also $\varphi = \frac{\pi}{4}$ für das Maximum. Der Wert von $u(x, y)$ an dieser Stelle ist dann

$$\max_{(x,y) \in B_1(0)} u(x, y) = \xi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$