Tag 3

Aufgabe 1 :

Berechne die Lösung der folgenden Integral-Differentialgleichung:

$$x'(t) + \int_0^t x(t-u)\,du = \cos(t), \qquad x(0) = 0$$

Gehe dabei wie folgt vor:

(a) Zeige, dass die Laplace Transformierte der Lösung durch $\mathcal{L}(x(t))(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$ gegeben ist.

(b) Löse das Problem durch Rücktransformation.
Hinweis: Benutze $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

Aufgabe 2 :

Gesucht wird eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) - 4u_t(x,t) - 3u(x,t) = 0 & \\ u(x,0) = x(x^2-\pi^2) & x \in [0,\pi] \text{ (AB)} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{(RB)} \end{cases}$$

Gehe dazu folgendermassen vor:

(a) Führe einen Seperationsansatz $u(x,t) = f(x)g(t)$ durch und erhalte zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

(b) Löse beide Differentialgleichungen mit den Randbedingungen (RB).

(c) Finde eine Basislösung $u_n(x,t)$.

(d) Entwickle die Anfangsbedingung $h(x) := x(x^2-\pi^2)$ auf $[-\pi,\pi]$ in eine Fourierreihe. Musst du sie ungerade oder gerade fortsetzen?
Hinweis: Du darfst die folgenden zwei Integrale verwenden:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{-2\pi\cos(n\pi)}{n} \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} x^3\sin(nx)\,dx = \frac{-2\pi(\pi^2 n^2 - 6)\cos(n\pi)}{n^3}$$

(e) Mache den Superpoisitonsansatz $u(x,t) = \sum u_n(x,t)$ mit den u_n aus c) und finde so eine Lösung zum Anfangsrandwertproblem.

Bitte umblättern!

Aufgabe 3 :

Wir möchten in dieser Aufgabe die Schwingung einer gezupften Saite näher anschauen. Diese soll durch die Funktion $u(x,t)$ beschrieben werden und folgt der PDE $u_{tt} = u_{xx}$. Wenn wir die Seite anzupfen, ist sie wie folgt angespannt:

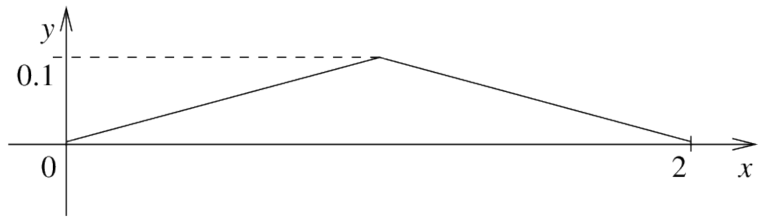

Abbildung 1: Die Seite wird gezupft ($f(x)$: Anfangsbedingung)

Die Funktion ist also

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & x \in [0,1] \\ \frac{1}{10}(2-x) & x \in (1,2] \end{cases}$$

Da die Funktion zunächst ruht, gilt $u_t(x,0) = 0$. Wir fassen die PDE zusammen:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \\ u(0,t) &= u(2,t) = 0 && (RB) \\ u_t(x,0) &= 0 && (RB) \\ u(x,0) &= f(x) && (AB) \end{aligned}$$

(a) Führe einen Seperationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ durch und erhalte zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

(b) Löse beide Differentialgleichungen mit den Randbedingungen (RB).

(c) Finde eine Basislösung $u_n(x,t)$.

(d) Superpositioniere die Basislösung und bestimme die fehlenden Koeffizienten mithilfe der Anfangsbedingung.
Hinweis: Setze die Funktion $f(x)$ zunächst zu einer 4-periodischen ungeraden Funktion fort und berechne ihre Fourier-Reihe. Begründe, wieso du dies machst.

Aufgabe 4 :

Wir betrachten folgende Laplace gleichung, wobei

$$B_1(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R} \,\big|\, x^2 + y^2 < 1\}, \quad \partial B_1(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R} \,\big|\, x^2 + y^2 = 1\}$$

gilt:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in B_1(0) \\ u(x,y) = x^2 & (x,y) \in \partial B_1(0) \end{cases}$$

(a) Bestimme das Maximum von $u(x,y)$.

(b) Bestimme $u(0,0)$.