

Mathematik III

Caspar Edition

HRVOJE KRIZIC

HS 2024

Für Studierende im Herbstsemester 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Differentialgleichungssysteme	1
1.1	Einführung	1
1.2	Vektorraum	2
1.2.1	Definition	2
1.2.2	Untervektorraum	3
1.2.3	Basis	4
1.3	Diagonalisierbarkeit	7
1.3.1	Hermiteische und symmetrische Matrizen	10
1.4	Exponential einer diagonalisierbaren Matrix	11
1.5	Jordan-Normalform	13
2	Fourier-Reihen	15
2.1	Einführung	15
2.2	Skalarprodukt und Norm	15
2.2.1	Skalarprodukt	15
2.2.2	Norm	18
2.2.3	Orthonormalbasis	19
2.3	Herleitung der Fourier-Reihe	20
2.3.1	Trigonometrische Reihe	20
2.3.2	Projektion	22
2.3.3	Allgemeine Periode	22
2.4	Berechnung der Fourierkoeffizienten	23
2.4.1	Tipps und Tricks	23
2.4.2	Beispiele	24
2.5	Komplexe Fourierreihe	26
2.5.1	Allgemeine Periode	27
2.6	Zusammenfassung	29
3	Linearisierung von DGL-Systemen	31
3.1	Stationäre Punkte	31
3.2	Herleitung der Linearisierung	31
3.3	Satz von Hartman-Grobman	32
3.4	Rezept und Beispiele	33
3.4.1	Tipps und Tricks	34
4	Partielle Differentialgleichungen	39
4.1	Definition und Randbedingungen	39
4.2	Fouriermethode	40
4.2.1	Separationsansatz	40

4.2.2	Superposition	41
4.2.3	Rezept	42
4.2.4	Beispiele	43

1

Differentialgleichungssysteme

Wichtige Kapitel aus Mathematik I und II: Ganzes Kapitel 5 und 6.4.

1.1 Einführung

Zum Einstieg schauen wir uns ein Beispiel aus der Mathematik I Vorlesung an. Wir haben ein Organ gegeben, das eine gewisse Substanz mit der Rate a abgibt während es eine Menge $M(t)$ dieser Substanz aufnimmt. Die Differentialgleichung (mit $y(x)$ = „Substanz im Organ“) welche die Änderung im Organ beschreibt ist dann gegeben durch

$$y'(t) = M(t) - ay(t).$$

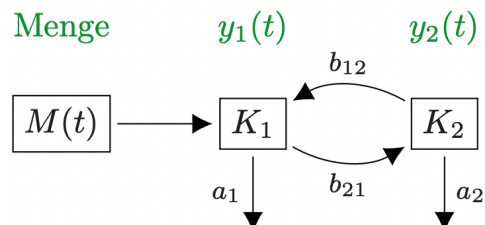
Wir nehmen nun zunächst an, dass $M(t) = 0$ (der Patient nimmt also keine Substanzen mehr auf). Dann erhalten wir die homogene Differentialgleichung

$$y'(t) = -ay(t).$$

Die Lösung dieser DGL ist gegeben durch

$$y(t) = Ce^{-at}.$$

Die Konstante C kann durch die Anfangsbedingung $y(0) = C$ bestimmt werden. Nun möchten wir uns zwei Organe (K_1 und K_2) anschauen, mit dem folgenden Modell:



Wie sehen nun die Differentialgleichungen aus? Wir haben nun eine Funktion für die Menge der Substanz in K_1 und eine Funktion für die Menge der Substanz in K_2 . $M(t)$ wird K_1 zugeführt und K_1 baut die Substanz mit der Rate a_1 ab (mit Rate meint man immer $a \cdot y(t)$). Die Rate b_{21} kommt vom Organ K_1 zum Organ K_2 . K_2 baut diese Substanz dann mit der

Rate a_2 ab und gibt wieder die Rate b_{12} zurück zu K_1 . Die Differentialgleichungen, welche wir für $y_1(t)$ und $y_2(t)$ erhalten, sind dann

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= M(t) - a_1 y_1(t) - b_{21} y_1(t) + b_{12} y_2(t), \\y_2'(t) &= b_{21} y_1(t) - a_2 y_2(t) - b_{12} y_2(t).\end{aligned}$$

Nun können wir nicht mehr die Differentialgleichungen getrennt lösen, da die eine von der anderen abhängt. Die Differentialgleichungen sind **gekoppelt**. Um gekoppelte Differentialgleichungen zu lösen, müssen wir diese in Matrixschreibweise bringen:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_1 + b_{21}) & b_{12} \\ b_{21} & -(a_2 + b_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

oder kürzer

$$y'(t) = Ay(t)$$

mit

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} -(a_1 + b_{21}) & b_{12} \\ b_{21} & -(a_2 + b_{12}) \end{pmatrix}.$$

Wenn wir uns aber die Differentialgleichung $y'(t) = Ay(t)$ anschauen, so sehen wir, dass sie die gleiche Form annimmt, wie die eindimensionale Differentialgleichung $y'(t) = ay(t)$, dessen Lösung bekanntlich $y(t) = Ce^{at}$ ist. Nun haben wir statt a eine Matrix A . Die Lösung müsste aber die gleiche Form annehmen, also $y(t) = e^{At}C$. Die Frage ist nur, was ist e^A . Man beachte, dass C hier ebenfalls ein Vektor ist:

$$C = \vec{C} = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}.$$

Da $y(t)$ auch ein Vektor ist, muss also e^A entweder ein Skalar oder eine Matrix sein. Schauen wir uns die mathematische Definition von der Exponentialfunktion an, so haben wir beim einsetzen einer Matrix A folgendes:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

wobei wir $A^0 = E$ (die Einheitsmatrix mit nur 1 in der Diagonalen) setzen. A^k sind Matrixmultiplikationen und somit ergibt e^A eine Matrix. Wie wir diese Matrix berechnen, werden wir in diesem Kapitel sehen. Bevor wir uns aber der Exponentialmatrix widmen, wollen wir zunächst das Konzept des Vektorraums besprechen.

1.2 Vektorraum

1.2.1 Definition

Ein reeller Vektorraum V ist eine Menge mit zwei Operationen

$$\begin{aligned}+ : V \times V &\rightarrow V, & (v, w) &\mapsto v + w \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V, & (\lambda, v) &\mapsto \lambda v\end{aligned}$$

so, dass für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $v + u = u + v$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
4. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
5. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
6. Es existiert ein Vektor $1 \in V$, sodass $1 \cdot v = v$
7. Es gibt einen Nullvektor $0 \in V$ mit $u + 0 = u$ für beliebiges $u \in V$.
8. Es gibt ein additives Inverses $-u \in V$ mit $u + (-u) = 0$.

All diese Eigenschaften scheinen zunächst trivial zu sein. Dies ist so, weil wir als Vektor meistens ein Element aus \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^2 verstehen, also beispielsweise $v = (1, 2, 3)^T$. Sowohl \mathbb{R}^2 als auch \mathbb{R}^3 sind beides reelle Vektorräume. Man beachte aber, dass beispielsweise \mathbb{N} kein reeller Vektorraum ist. Denn unsere Abbildung der Skalaren Multiplikation hat die Zielmenge V . Wenn wir aber ein Element aus \mathbb{N} mit einer reellen Zahl multiplizieren, erhalten wir keine natürliche Zahl mehr. Beispielsweise kann $\lambda = \pi \in \mathbb{R}$ gewählt werden und unser Element $v = 4 \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lambda v = 4\pi \notin \mathbb{N}$. Allgemein gilt, dass \mathbb{N}^k kein reeller Vektorraum ist. \mathbb{Q} ist ebenfalls kein Vektorraum (aus dem exakt gleichen Grund).

1.2.2 Untervektorraum

Sei nun V ein Vektorraum. Dann ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, falls für $u, w \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

1. $0 \in U$
2. $u + w \in U$
3. $\lambda \cdot u \in U$

U bildet dann selbst einen Vektorraum. Man nennt die zweite Eigenschaft „Abgeschlossenheit unter Addition“ und die dritte „Abgeschlossenheit unter Skalarer Multiplikation“.

Beispiel. Ist

$$U = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Untervektorraum von \mathbb{R}^3 ?

Lösung. Es ist offensichtlich, dass U eine Teilmenge von \mathbb{R}^3 bildet. Wir müssen also nur noch die drei Eigenschaften überprüfen. Sei dazu:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit kann jeder Vektor in U geschrieben werden als $t_i v$. Wir zeigen nun die Eigenschaften:

1. Mit $t = 0$ erhalten wir $0 \cdot v = 0$ den Nullvektor, welcher somit in U enthalten ist.
2. Seien t_1v und t_2v zwei Elemente aus U . Dann ist $t_1v + t_2v = (t_1 + t_2)v \in U$.
3. Sei $tv \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $\lambda \cdot tv = \tilde{t}v \in U$ wobei $\tilde{t} = \lambda t$ ist.

Somit ist U ein Untervektorraum.

Beispiel. Ist $U_0 = \{0\}$ ein Untervektorraum von \mathbb{R} ?

Lösung. Es ist klar, dass U_0 eine Teilmenge von \mathbb{R} bildet. Somit gilt es, die Eigenschaften zu überprüfen. Da das einzige Element 0 ist, können wir nur $u = 0$ und $w = 0$ setzen:

1. $0 \in U_0$ ist offensichtlich gegeben.
2. $u + w = 0 + 0 = 0 \in U_0$.
3. Für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda u = \lambda 0 = 0 \in U_0$.

Somit ist U_0 ein Untervektorraum.

Beispiel. Ist

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Untervektorraum von \mathbb{R}^3 ?

Lösung. Offensichtlich ist dies eine Teilmenge von \mathbb{R}^3 . Wir überprüfen also die Eigenschaften:

1. Wir wollen schauen, ob der Nullvektor in U enthalten ist. Es muss also ein t existieren, sodass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass es kein solches t geben kann, da sowohl $1 + t \cdot 3 = 0$ als auch $0 + t \cdot 2 = 0$ gelten muss, um den Nullvektor zu erhalten.

U ist somit kein Untervektorraum, da der Nullvektor nicht enthalten ist.

1.2.3 Basis

Wir möchten uns nun einen Vektor aus \mathbb{R}^3 anschauen. Nehmen wir beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Jeden Vektor können wir ja eindeutig identifizieren durch die einzelnen Komponenten. Beispielsweise gilt offensichtlich

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

da die letzte Komponente nicht übereinstimmt. Diese einfache Art, einen Vektor eindeutig mit seinen Komponenten zu beschreiben, können wir uns auch als Linearkombination denken. Denn ein Vektor ist eindeutig durch folgende Linearkombination definiert:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der erste Vektor $e_1 = (1, 0, 0)^T$ gibt uns die erste Komponente des Vektors, der zweite Vektor e_2 die zweite Komponente und der dritte Vektor e_3 die dritte. Wir können nun jeden Vektor aus \mathbb{R}^3 als eine Linearkombination von diesen Vektoren schreiben. Die Eigenschaft, dass drei Vektoren alle Vektoren aus \mathbb{R}^3 „erzeugen“, haben genau Vektoren, welche ein sogenanntes „Erzeugendensystem“ bilden. Ein weiteres Beispiel eines Erzeugendensystems für \mathbb{R}^3 wäre

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Versuche als Übung den Vektor $(1, 2, 3)^T$ als Linearkombination von diesen Vektoren zu schreiben. Wie wir sehen, hat dieses Erzeugendensystem aber vier Vektoren, während unser „Komponenten“-Erzeugendensystem insgesamt nur drei Vektoren hatte. Das kleinstmögliche Erzeugendensystem hat genau so viele Vektoren, wie die Dimension des Vektorraums. \mathbb{R}^n hat dabei Dimension $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, also in unserem Fall 3. Somit ist das Erzeugendensystem $\{e_1, e_2, e_3\}$ das kleinstmögliche Erzeugendensystem. Diese minimalen Erzeugendensysteme haben in der Mathematik einen speziellen Namen: wir nennen sie die **Basis** des Vektorraums. Um zu überprüfen, ob eine Menge an Vektoren eine Basis bildet, müssen wir also zwei Punkte beweisen:

Rezept. (Beweise, ob ... eine Basis ist.)

1. Zeige, dass die Menge linear unabhängig ist. Im Falle von \mathbb{R}^n kann man die Vektoren als Spalten in eine Matrix schreiben und dessen Determinante ermitteln. Ist diese $\neq 0$, so ist die Menge linear unabhängig.
2. Die Anzahl der Elemente (Vektoren) muss genau der Dimension des Vektorraums entsprechen.

(Falls noch unklar ist, was „linear unabhängig“ bedeutet, schaue nochmals im Kapitel der Linearen Algebra nach) Die Dimensionen von wichtigen Vektorräumen sind hier angegeben:

$$\begin{aligned} \dim(M_{n \times n}) &= n^2 \\ \dim(\mathcal{P}_{\leq n}) &= n + 1 \\ \dim(\mathbb{R}^n) &= n \end{aligned}$$

wobei wir $M_{n \times n}$ den Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen nennen und $\mathcal{P}_{\leq n}$ der Vektorraum aller Polynom bis zum n -ten Grad ist. Die Dimension eines Vektorraums kann also so interpretiert werden, als Anzahl frei wählbarer Variablen, um einen Vektor dieses Vektorraums herzustellen. Zum Beispiel ist $\dim(M_{n \times n}) = n^2$, da wir jeden Eintrag in einer Matrix frei wählen können und es n^2 Einträge in einer $n \times n$ Matrix gibt.

Beispiel. Was ist die Dimension des Untervektorraums von $V = M_{n \times n}$:

$$U = \{A \in M_{n \times n} \mid A^T = A\}.$$

Lösung. Damit eine Matrix $A^T = A$ erfüllt, also symmetrisch ist, müssen alle Elemente rechts von der Hauptdiagonalen gleich sein, wie die Elemente links von der Hauptdiagonale. Wir dürfen also nur die Elemente auf der Hauptdiagonale und beispielsweise links von der Hauptdiagonalen wählen, da der Rest durch $A^T = A$ dann schon gesetzt sein muss. Das sind insgesamt $\frac{n(n+1)}{2}$ Elemente.

Beispiel. Ist die folgende Menge eine Basis von $M_{2 \times 2}$?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösung. Wir überprüfen die beiden Eigenschaften:

1. Die vier Matrizen müssen linear unabhängig sein, da sie jeweils für eine Komponente stehen. Wir können also nicht aus den anderen drei Matrizen die vierte per Linearkombination bilden.
2. Die Dimension ist $\dim(M_{2 \times 2}) = 2^2 = 4$ und wir haben genau 4 Matrizen. Somit ist die Menge eine Basis.

Beispiel. Ist die folgende Menge eine Basis von \mathbb{R}^3 ?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösung. Wir überprüfen die beiden Eigenschaften:

1. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, berechnen wir die Determinante der Matrix mit den Vektoren in den Spalten:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Damit ist die Menge linear unabhängig.

2. Die Dimension ist $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ und wir haben genau 3 Vektoren. Somit ist die Menge eine Basis.

Ein wichtiger Satz für unsere DGL-Systeme ist folgender:

Satz. Sei das DGL-System $y'(t) = Ay(t)$ gegeben. Dann ist die Basis des Lösungsraums dieser DGL gegeben durch die **Spaltenvektoren** von e^{tA} .

Koordinatenvektoren

Sei als Beispiel die Basis

$$\mathcal{B} = \{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = 3x^2 - 1\}$$

des Vektorraums $V = \mathcal{P}_{\leq 2}$ gegeben. Sei nun $q(x) = x^2$. Da $q(x)$ ein Element aus $\mathcal{P}_{\leq 2}$ ist, können wir $q(x)$ als Linearkombination der Basisvektoren (bzw. „Basispolynomen“) schreiben. Es gilt

$$x^2 = \frac{1}{3}(3x^2 - 1) + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) + \frac{1}{3} \cdot p_3(x).$$

Die Koeffizienten, mit denen wir $q(x)$ aus den Basiselementen erzeugen können, können wir auch in einen Vektor schreiben:

$$[q(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Wir nennen diesen Vektor den **Koordinatenvektor** bezüglich der Basis \mathcal{B} .

1.3 Diagonalisierbarkeit

Sei eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir wissen bereits, wie wir die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix bilden. Wir erhalten die Eigenwerte (Übung!)

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

und wir erhalten die dazugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit etwas nachrechnen, können wir sehen, dass diese drei Vektoren genau eine Basis von \mathbb{R}^3 bilden. Die Eigenvektoren der Matrix A bilden also eine Basis. Wir nennen eine solche Basis eine Eigenbasis. Es gibt Matrizen, die auch keine Eigenbasis haben. Ein Beispiel davon ist

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel. *Wieso hat B keine Eigenbasis?*

Lösung. *Wir erhalten die Eigenwerte*

$$\lambda_1 = 9 \text{ und } \lambda_{2,3} = 6.$$

Für λ_1 ergibt sich

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und für $\lambda_{2,3}$ erhalten wir nur einen Eigenvektor¹

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist die Anzahl der Vektoren nicht gleich der Dimension von \mathbb{R}^3 und deswegen bilden die Eigenvektoren keine Eigenbasis.

Matrizen welche eine Eigenbasis besitzen, nennen wir diagonalisierbar. Wir können diese Matrizen nämlich wie folgt zerlegen:

$$A = TDT^{-1} \text{ bzw. } T^{-1}AT = D.$$

Dabei ist A die diagonalisierbare Matrix, D ist die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

mit allen Eigenwerten in der Diagonale, und T ist die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

¹Wie wissen wir, wie viele Eigenvektoren wir haben? Ganz einfach: so viele freie Variablen, wie wir beim Ausrechnen der Eigenvektoren erhalten, so viele Eigenvektoren haben wir für einen Eigenwert. Ein Beispiel: wir erhalten nach dem Gauss-Verfahren folgenden Vektor:

$$v = \begin{pmatrix} s \\ 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

Dann haben wir zwei Eigenvektoren für diesen Eigenwert. Wenn wir nämlich diesen Vektor etwas umschreiben, erhalten wir:

$$v = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Raum der Eigenvektoren ist also zweidimensional (durch s und t aufgespannt).

mit allen Eigenvektoren in den Spalten. T^{-1} ist die Inverse von T . Die Inverse für 3×3 und grössere Matrizen zu bestimmen ist sehr mühsam (ausser man verwendet den Trick aus Kapitel 5.4.4 aus meinem Buch ☺). Für 2×2 Matrizen haben wir aber die folgende Formel:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Wir möchten das Diagonalisieren einer Matrix in einem Rezept zusammenfassen:

Rezept. ($n \times n$ Matrix A diagonalisieren)

1. Finde die Eigenwerte der Matrix A (mit $\det(A - \lambda E) = 0$ setzen).
2. Finde die dazugehörigen Eigenvektoren v_1, v_2, \dots (indem du das homogene Gleichungssystem $A - \lambda_i E = 0$ löst)
3. Nun gibt es zwei Fälle:
 - (a) Fall 1: Falls die Eigenvektoren keine Basis von \mathbb{R}^n bilden, ist die Matrix nicht diagonalisierbar und wir müssen nicht mehr weiterrechnen.
 - (b) Fall 2: Hat die Matrix eine Eigenbasis, so können wir T aufstellen:

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

und berechnen T^{-1} entweder mit der Formel für 2×2 Matrizen, oder mit dem Computer.

4. Die Zerlegung ist dann

$$A = TDT^{-1} \text{ bzw. } T^{-1}AT = D$$

Wir möchten dieses Rezept anhand von zwei Beispielen anwenden:

Beispiel. Diagonalisiere

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir gehen vor, wie im Rezept:

1. Wir erhalten die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$$

2. Die dazugehörigen Eigenvektoren (beachte die Reihenfolge) sind beispielsweise

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Die beiden Vektoren sind linear unabhängig (da keines der beiden ein Vielfaches des anderen ist) und die Dimension stimmt mit der Anzahl (2) überein. Somit ist die Matrix diagonalisierbar und die Matrix T lautet

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit der Formel von weiter oben erhalten wir

$$T^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

4. Die Zerlegung ist dann

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_T = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}_D$$

Beispiel. Diagonalisiere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir lösen die Aufgabe mit dem Rezept

1. Für die Eigenwerte erhalten wir nur $\lambda_{1,2} = 1$.

2. Wir erhalten nur einen dazugehörigen Eigenvektor:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Offensichtlich bildet dieser Vektor keine Eigenbasis von \mathbb{R}^2 und somit ist die Matrix auch nicht diagonalisierbar.

1.3.1 Hermitesche und symmetrische Matrizen

Eine reelle Matrix nenne wir symmetrisch, falls

$$A = A^T$$

gilt. Die Einträge sind also an der Diagonalen gespiegelt. Ein Beispiel dafür ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Eine hermitesche Matrix ist die komplexe Matrix A , welche folgende Eigenschaft erfüllt:

$$A = \bar{A}^T$$

Sie ist sehr ähnlich wie eine symmetrische Matrix, nur sind die Einträge nicht nur gespiegelt, sondern auch komplex konjugiert. Ein Beispiel davon ist

$$\begin{pmatrix} i & 2+i & i \\ 2-i & 9i & 1-i \\ -i & 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

Wir führen diese zwei Begriffe ein, um schneller entscheiden zu können, ob Matrizen diagonalisierbar sind oder nicht, denn es gilt:

Satz. *Symmetrische und hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar.*

1.4 Exponential einer diagonalisierbaren Matrix

Wofür benötigen wir nun überhaupt den Begriff der Diagonalisierbarkeit. Es stellt sich heraus, dass dieser sehr nützlich ist, um das Exponential e^A einer Matrix zu berechnen. Schauen wir uns mal A^k für eine diagonalisierbare Matrix A an. Dann haben wir T und D so berechnet, dass folgendes gilt

$$A^k = (TDT^{-1})^k.$$

Wenn wir nun aber die Potenz ausschreiben, erhalten wir

$$A^k = T \underbrace{D T^{-1} T}_E D \underbrace{T^{-1} T}_E D T^{-1} \dots T \underbrace{D T^{-1} T}_E D T^{-1} = T D^k T^{-1},$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $T^{-1}T$ genau die Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt. Es gilt also $A^k = T D^k T^{-1}$. Wenn wir das nun in unsere Definition des Exponentials einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T D^k T^{-1} \\ &= T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k \right) T^{-1} \\ &= T e^D T^{-1} \end{aligned}$$

Wie lässt sich nun e^D bestimmen? Ohne Beweis gilt hierfür ganz einfach:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \implies e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix}.$$

Beispiel. Bestimme für die, weiter oben verwendete, Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

das Exponential e^A und e^{At} für beliebiges $t \in \mathbb{R}$. Was ist nun die Lösung des DGL-Systems $y'(t) = Ay(t)$ mit $y(0) = (1, 1)^T$.

Lösung. Wir haben schon die Zerlegung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_T = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}_D$$

in einem vorherigen Beispiel berechnet. Da $e^A = Te^{DT}T^{-1}$, können wir dies direkt ausrechnen.

$$e^A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^5 + 2e^2 & 2e^5 - 2e^2 \\ e^5 - e^2 & 2e^5 + e^2 \end{pmatrix}$$

Das Exponential e^{tA} erhalten wir, indem wir die Diagonalmatrix D einfach mal t rechnen. Also

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{5t} + 2e^{2t} & 2e^{5t} - 2e^{2t} \\ e^{5t} - e^{2t} & 2e^{5t} + e^{2t} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Differentialgleichungssystems ist gegeben durch

$$y(t) = e^{tA}y(0)$$

also in unserem Fall

$$y(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{5t} + 2e^{2t} & 2e^{5t} - 2e^{2t} \\ e^{5t} - e^{2t} & 2e^{5t} + e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}$$

Es gelten folgende zwei Rechenregeln für Exponentiale mit Matrizen:

1. Falls $AB = BA$, dann gilt $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ (Achtung!: $AB = BA$ ist nicht immer wahr).
2. Für die Inverse des Exponentials gilt $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

1.5 Jordan-Normalform

Was tun wir nun, wenn eine Matrix nicht diagonalisierbar ist? Wie berechnen wir dann das Exponential? Das schöne ist, dass immer noch eine Zerlegung existiert, nämlich genau die folgende

$$A = PJP^{-1}$$

Man muss hier aber richtig aufpassen, dass man diese Zerlegung nicht mit der Diagonalisierung verwechselt. Zum einen ist J keine Diagonalmatrix, sondern die sogenannte Jordan-Normalform und P besteht auch nicht aus Eigenvektoren. Wir werden in diesem Abschnitt nicht lernen, wie wir P oder J im allgemeinen Fall ausrechnen, aber wir möchten zumindest klären, was die Jordan-Normalform genau ist.

Eine Jordan-Normalform ist eine sogenannte Blockmatrix. Sie besteht also aus lauter kleineren Matrizen in der Diagonalen. Ein Beispiel einer allgemeinen Blockmatrix ist beispielsweise

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{5} & 0 \\ \boxed{3} & \boxed{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Die Jordan-Normalform hat ebenfalls solche Blöcke in der Diagonalen. Diese Blöcke nennen sich Jordan-Blöcke. Ein 2×2 Jordan-Block (bzw. ein Jordan-Block der Länge 2) ist von der Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Ein Jordan-Block der Länge 3 ist von der Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

und so weiter. Man merke sich dabei folgende Regeln

1. Ein Jordan-Block hat genau einen Eigenwert auf der ganzen Diagonalen. Verschiedene Jordan-Blöcke können zwar den gleichen Eigenwert haben, aber ein Jordan-Block kann keine zwei verschiedene Eigenwerte auf der Diagonalen haben.
2. Die Einträge über den Eigenwerten werden alle mit Einsen gefüllt.

Das Exponential eines Jordan-Blocks multipliziert mit t ist gegeben durch

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Jordan-Normalform einer Matrix hat dann etwa die folgende Form:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_i} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_j} \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass die Eigenwerte der Blöcke auch gleich sein können. Falls also eine Matrix A die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_{2,3} = 4$ hat, so sind die folgenden Matrizen beide möglich:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

Da Jordan-Normalformen und deren Zerlegungen sehr aufwendig sind zu berechnen, können wir zur Berechnung von J den Computer verwenden. Zuletzt ist das Exponential von tJ gegeben durch

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \boxed{e^{tJ_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{e^{tJ_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

mit den Exponentialen der Jordan-Blöcke in der Diagonalen.

Falls ein DGL-System $y' = Ay$ gegeben ist, und die Matrix A nicht diagonalisierbar ist, so ist die Basis des Lösungsraumes gegeben durch die Spaltenvektoren von $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$.

2

Fourier-Reihen

Wichtige Kapitel aus Mathematik I und II: Kapitel 3 (v.a. partielle Integration sollte sitzen) und 4 (v.a. Polarform), ausserdem soll der Begriff der Periode T klar sein (Kapitel 1.2.7).

2.1 Einführung

In der Natur treten sehr häufig periodische Funktionen auf. Angefangen beim Herzschlag über Pendelschwingungen bis hin zu Ton und Licht. Als Periode wird dabei jeweils eine bestimmte Zeitdauer bezeichnet, nach der sich die Schwingung wiederholt. Jedoch liefert die reine Aufnahme solcher Signale nur wenige Informationen. Ziel der Fourierreihen ist es, derlei unübersichtlich periodische Funktionen möglichst verständlich, das heisst mit den uns vertrauten trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$, darzustellen.

Ziel wird es sein, eine Funktion in folgende Darstellung zu bringen:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Die Koeffizienten a_k und b_k werden ausreichend sein, die ganze Funktion zu beschreiben.

2.2 Skalarprodukt und Norm

2.2.1 Skalarprodukt

Bevor wir zur Herleitung der Fourier-Reihe kommen, möchten wir hier den Begriff des Skalarproduktes diskutieren. Bis jetzt kennen wir das Skalarprodukt

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Dieses Skalarprodukt wird auch das Standardskalarprodukt genannt. Tatsächlich hat ein allgemeines Skalarprodukt meist nicht viel mit dem zu tun. Die mathematische Definition des Skalarproduktes ist die folgende:

Definition: Ein Skalarprodukt $\langle a, b \rangle$ ist definiert als eine Abbildung $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (weist also einem paar Vektoren (Elemente des Vektorraums) eine Zahl zu), welche folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$ und $\langle a, \lambda b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (Bilinear)
2. $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ (Symmetrie)
3. $\langle a, a \rangle \geq 0$ und $\langle a, a \rangle = 0$ genau dann wenn $a = 0$ (Positiv definit)

Beispiel. Zeige mithilfe der Definition, dass das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

ein Skalarprodukt ist.

Lösung. Wir gehen Schritt für Schritt die Definition durch. Es ist klar, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Wir möchten nun die drei Eigenschaften überprüfen:

1. Wir überprüfen die Bilinearität:

$$\begin{aligned} \langle a, b + c \rangle &= a_1(b + c)_1 + a_2(b + c)_2 + a_3(b + c)_3 \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ &= \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle a, \lambda b \rangle &= a_1(\lambda b)_1 + a_2(\lambda b)_2 + a_3(\lambda b)_3 \\ &= \lambda a_1 b_1 + \lambda a_2 b_2 + \lambda a_3 b_3 \\ &= \lambda(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &= \lambda \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

2. Die Symmetrie folgt direkt aus $a_i b_i = b_i a_i$.

3. Wir überprüfen noch die positive Definitheit:

$$\langle a, a \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0$$

da die Quadrate jeweils positiv sein müssen. Es gilt ausserdem $\langle a, a \rangle = 0$ genau dann, wenn $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ beziehungsweise $a = 0$.

Somit ist das Standardskalarprodukt wie erwartet ein Skalarprodukt.

Sei nun $V = C^0([a, b])$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen im Intervall $[a, b]$, dann definieren wir das Skalarprodukt zweier Funktionen (Elemente des Vektorraums) mit

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Beispiel. Zeige, dass dies ein Skalarprodukt ist.

Lösung. Wir wissen, dass dies eine wohldefinierte Abbildung ist. Nun möchten wir die Eigenschaften des Skalarprodukts untersuchen:

1. Bilinearität folgt direkt aus der Linearität des Integrals. Wir haben

$$\begin{aligned}\langle f, g + \lambda h \rangle &= \int_a^b f(x)(g(x) + \lambda h(x)) dx \\ &= \int_a^b f(x)g(x) dx + \lambda \int_a^b f(x)h(x) dx\end{aligned}$$

2. Die Symmetrieeigenschaft folgt direkt aus $f(x)g(x) = g(x)f(x)$.

3. Für die positive Definitheit erhalten wir

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b (f(x))^2 dx \geq 0$$

da das Quadrat immer positiv ist. Nur für $f(x) = 0$ gilt die Gleichheit und somit haben wir die positive Definitheit gezeigt.

Beispiel. Zeige, dass $\langle a, b \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\langle a, b \rangle = 2a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + 2a_2b_2$$

ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 ist.

Lösung. Wir beweisen wieder die Eigenschaften:

1. Da allgemein $a_i(b_j + \lambda c_j) = a_i b_j + \lambda a_i c_j$ gilt (siehe Standardskalarprodukt Beweis), haben wir Bilinearität.
2. Symmetrie ist gegeben, da $x_1 y_2$ und $y_1 x_2$ jeweils abgezogen werden, und $2x_1 y_1$ und $2x_2 y_2$ ebenfalls symmetrisch sind.
3. Wir beweisen noch die positive Definitheit:

$$\langle a, a \rangle = 2a_1^2 - 2a_1 a_2 + 2a_2^2 = 2(a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2)$$

Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

$$(a) \ a_1 \geq a_2 : 2(a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2) \geq 2(a_1^2 - a_1^2 + a_2^2) = 2a_2^2 \geq 0$$

$$(b) \ a_2 \geq a_1 : 2(a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2) \geq 2(a_1^2 - a_2^2 + a_2^2) = 2a_1^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = a_2 = 0$ bzw. $a = 0$ ist.

Die **Orthogonalität** ist bei einem Skalarprodukt wie folgt definiert:

$$a, b \in V \text{ orthogonal} \iff \langle a, b \rangle = 0$$

2.2.2 Norm

Eine Norm auf einem reellen Vektorraum ist definiert als eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ sodass die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ (positiv definit)
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Für $v, w \in V$ gilt: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Eine induzierte Norm, ist eine Norm, welche durch ein Skalarprodukt induziert wird. Zu jedem Skalarprodukt können wir also eine Norm

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

definieren. Ein Vektorraum mit Skalarprodukt nennen wir Innenproduktraum (Auch Prä-Hilbertraum). Ein Vektorraum, welcher mit einer Norm versehen ist, nennen wir einen normierten Vektorraum. Anhand des induzierten Skalarprodukts sieht man leicht, dass jeder Innenproduktraum auch ein normierter Vektorraum ist (nicht aber umgekehrt, da auch Normen existieren, welche nicht von einem Skalarprodukt induziert werden). Ein Vektor $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ heisst Einheitsvektor.

Wir möchten hier noch zwei nützliche Eigenschaften der induzierten Norm erwähnen:

1. Für normierte Vektorräume, dessen Norm von einem Skalarprodukt induziert werden, gilt folgende Gleichung:

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2\langle a, b \rangle + \|b\|^2$$

Falls a orthogonal zu b steht, erhalten wir

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

Wenn wir uns a und b als zwei Vektoren in \mathbb{R}^2 vorstellen, erhalten wir genau den Satz des Pythagoras.

2. Die sogenannte Ungleichung von Cauchy-Schwarz ist gegeben durch

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|$$

Beispiel. Zeige, dass

$$\|x\| = \max |x_j|$$

(also das Maximum des Absolutbetrags der Komponenten) eine Norm ist.

Lösung. Wir überprüfen die drei Eigenschaften:

1. Weil wir den Absolutbetrag der Komponenten nehmen, ist die erste Eigenschaft offensichtlich erfüllt. Es gilt also $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

2. Es gilt

$$\|\lambda x\| = \max |\lambda x_j| = \lambda \max |x_j| = \lambda \|x\|.$$

3. Die dritte Eigenschaft beweisen wir mittels der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \max |x_j + y_j| \\ &\leq \max |x_j| + |y_j| \\ &\leq \max |x_j| + \max |y_j| \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Beispiel. Beweise, dass für $V = C^0([a, b])$

$$\|f\| = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

eine Norm ist.

Lösung. Wir können wieder die Eigenschaften der Norm beweisen. Man kann aber auch direkt sehen, dass dies genau die induzierte Norm vom Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

ist. Es gilt dann

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 dx$$

und die induzierte Norm ist gegeben durch die Wurzel von $\langle f, f \rangle$ (beachte, dass $\sqrt{\langle f, f \rangle} = \langle f, f \rangle^{1/2}$).

2.2.3 Orthonormalbasis

Eine Basis, dessen Vektoren orthogonal zueinander stehen (also $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ gilt für alle $i \neq j$) nennen wir eine **Orthogonalbasis**. Eine **Orthonormalbasis** ist hingegen eine Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, welche die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Die obere Eigenschaft bedeutet also, dass die Vektoren zusätzlich zur Orthogonalität auch alle Einheitsvektoren sind, bzw. Norm 1 haben.

Beispiel. sei $(\mathcal{P}_{\leq 2}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 ausgestattet, mit dem Skalarprodukt $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$. Zeige, dass die Basis

$$\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = 3x^2 - 1\}$$

eine **Orthogonalbasis** des Vektorraums ist.

Lösung. Es sollte klar sein, dass dies eine Basis von $\mathcal{P}_{\leq 2}$ bildet, denn durch die verschiedenen Grade der Polynome müssen sie auch linear unabhängig sein. Ausserdem ist die Dimension $3 = 2 + 1 = \dim(\mathcal{P}_{\leq 2})$. Wir berechnen also die Skalarprodukte der einzelnen Basisvektoren. Beachte hierbei, dass für eine ungerade Funktion $f_u(x)$

$$\int_{-a}^a f_u(x) dx = 0$$

gilt. Ausserdem gilt immer ungerade \cdot gerade = ungerade und ungerade \cdot ungerade = gerade. Wir sehen, dass $p_1(x)$ und $p_3(x)$ jeweils gerade sind (nur gerade Potenzen haben) und $p_2(x)$ ungerade ist. Somit gilt direkt

$$\langle p_1(x), p_2(x) \rangle = 0, \quad \langle p_2(x), p_3(x) \rangle = 0.$$

Wir müssen nur $\langle p_1(x), p_3(x) \rangle = 0$ direkt überprüfen:

$$\langle p_1(x), p_3(x) \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot (3x^2 - 1) dx = x^3 - x \Big|_{-1}^1 = 0 - 0 = 0.$$

Somit bildet die Basis eine Orthogonalbasis.

Beispiel. Gleiches Setup wie im letzten Beispiel. Zeige nun, dass die Basis

$$\left\{ p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, p_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, p_3(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1) \right\}$$

eine Orthonormalbasis des Vektorraums ist.

Lösung. Die Basis ist orthogonal, da sich die Elemente nur um einen konstanten Faktor unterscheiden vom letzten Beispiel und somit die Integrale weiterhin = 0 sind. Nun zum Skalarprodukt mit sich selbst:

$$\langle p_1(x), p_1(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}x \Big|_{-1}^1 = 1$$

$$\langle p_2(x), p_2(x) \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}}x \sqrt{\frac{3}{2}}x dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}x^3 \Big|_{-1}^1 = 1$$

$$\langle p_3(x), p_3(x) \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1) \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1) dx = \int_{-1}^1 \frac{5}{8}(3x^2 - 1)^2 dx = 1.$$

Im letzten Schritt können wir das Polynom im Quadrat ausklammern und jeden einzelnen Term integrieren. Das sollte aus der Mathematik I bekannt sein. Somit haben wir gezeigt, dass die Normen der Basiselemente alle 1 sind und die Basis somit orthonormal ist.

2.3 Herleitung der Fourier-Reihe

2.3.1 Trigonometrische Reihe

Eine Trigonometrische Reihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Mit der Fourierreihe bringen wir also eine Funktion in die Form einer trigonometrischen Reihe. Für $k = 0$ haben wir $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$, somit können wir den ersten Term aus der Summe nehmen. Damit erhalten wir die Form der Fourierreihe

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Der Vektorraum der Funktionen, welche als Trigonometrische Reihe geschrieben werden können, bezeichnen wir mit T_n . Da wir nur 2π -periodische Funktionen betrachten, gilt auch $T_n \subset C^0([-\pi, \pi])$. Eine Basis dieses Vektorraums ist

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \quad s_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx)$$

Beispiel. Zeige, dass die Basis von T_n eine Orthonormalbasis ist.

Lösung. Wir müssen also zeigen, dass das Skalarprodukt der Basisvektoren mit sich selber jeweils = 1 sind und mit den anderen Vektoren jeweils = 0 (bzw. orthogonal) sind. Da c_0, c_k und s_k jeweils Funktionen sind aus $C^0([-\pi, \pi])$, benützen wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

Wir beweisen zunächst $\langle v, v \rangle = 1$:

$$\begin{aligned} \langle c_0, c_0 \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dx = 1 \\ \langle c_k, c_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \cos^2(kx) dx = 1 \\ \langle s_k, s_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin^2(kx) dx = 1 \end{aligned}$$

wobei wir bei den letzten beiden Integrale jeweils die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \\ \cos^2(x) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \end{aligned}$$

benutzt haben. Nun müssen wir noch $\langle c_0, c_k \rangle = \langle c_k, s_k \rangle = \langle c_0, s_k \rangle = 0$ zeigen.

$$\begin{aligned} \langle c_0, c_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(kx) dx = 0 \\ \langle c_k, s_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin(kx) \cos(kx) dx = 0 \\ \langle c_0, s_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(kx) dx = 0 \end{aligned}$$

Das zweite Integral haben wir mithilfe der partiellen Integration gelöst. Wir werden später einige Tricks kennenlernen, wie wir solche Integrale einfacher lösen können.

2.3.2 Projektion

Wofür benötigen wir nun diese Basis? Bei der Fourierreihen-Berechnung möchten wir ja eine gute Approximation der Funktion mit einer Trigonometrischen Reihe finden. Wir möchten also eine Funktion $P(f) \in T_n$ finden, welche die Funktion am besten approximiert. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies, dass wir $\|f - P(f)\|$ minimal haben wollen. Da $P(f)$ in T_n liegt, wissen wir, dass wir sie als Linearkombination von c_0 , c_k und s_k schreiben können. Wir haben also

$$P_N(f) = \alpha_0 c_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k c_k + \beta_k s_k$$

Es lässt sich dann zeigen, dass

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \langle f, c_k \rangle \\ \beta_k &= \langle f, s_k \rangle\end{aligned}$$

die Forderung des minimalsten $\|f - P(f)\|$ erfüllt für $N \rightarrow \infty$. Wir nennen $P_N(f)$ eine Projektion von f auf den Unterraum T_n . Wir erhalten also

$$P_N(f) = \langle f, c_0 \rangle c_0 + \sum_{k=1}^N \langle f, c_k \rangle c_k + \langle f, s_k \rangle s_k \stackrel{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Mit Koeffizientenvergleich finden wir dann die Fourierkoeffizienten (für 2π -periodische Funktionen)

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx\end{aligned}$$

Projektion im Allgemeinen

Eine Projektion ist definiert als die Funktion

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

wobei x ein Element aus dem Vektorraum ist (bei $C^0([a, b])$ ist es f) und $\{e_i\}$ ist eine Orthonormalbasis (bei $C^0([a, b])$ ist es $\{c_0, c_k, s_k\}$).

2.3.3 Allgemeine Periode

Bis jetzt haben wir uns nur 2π -periodische Funktionen angeschaut. Wir können aber auch Fourierreihen für andere periodische Funktionen berechnen. Dazu führen wir eine kleine Substitution durch, indem wir das 2π durch $\frac{2\pi}{T}$ ersetzen.

Für eine allgemeine Periode T erhalten wir die Fourierreihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right)$$

wobei die Fourierkoeffizienten nun

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) dx$$

2.4 Berechnung der Fourierkoeffizienten

2.4.1 Tipps und Tricks

Bevor wir beginnen, die Fourierkoeffizienten zu berechnen, möchten wir an dieser Stelle zwei Tipps geben zur Berechnung der Integralen:

Gerade und ungerade Funktionen

Es gilt

1. Ist die Funktion ungerade, also $f(-x) = -f(x)$, so gilt (zum Beispiel für $\sin(kx)$)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

2. Ist die Funktion gerade, also symmetrisch an der y -Achse (oder $f(-x) = f(x)$), so gilt

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx.$$

Eine gerade Funktion ist beispielsweise $\cos(kx)$

Vor allem der erste Satz wird sehr wichtig sein für unsere Berechnungen, da wir bei den Fourierkoeffizienten ebenfalls Grenzen haben, welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Was ist nun, wenn wir ein Produkt von gerader oder ungerader Funktionen haben, wie zum Beispiel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(kx) dx$$

Dann können wir folgenden Trick verwenden:

Trick. Haben wir ein Produkt aus lauter gerader oder ungerader Funktionen, so können wir jede ungerade Funktion durch eine -1 ersetzen und jede gerade Funktion durch eine 1 . Wenn das Produkt 1 ergibt, so ist das Produkt der Funktionen gerade. Wenn sie hingegen -1 ergibt, ist das Produkt der Funktionen ungerade.

Wir haben diesen Trick schon bei der Orthonormalbasis indirekt verwendet. Es folgt nun direkt mit diesem Trick

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(kx) dx = 0.$$

Beispiel. Ist $f(x) = x \cos(x) \sin(x)$ gerade oder ungerade?

Lösung. Wir haben x ungerade, $\cos(x)$ gerade und $\sin(x)$ ungerade. Somit ist die ganze Funktion $(-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 1$ gerade.

Was bedeuten nun diese Aussagen für unsere Fourierkoeffizienten? a_k ist ein Produkt aus $f(x)$ und der geraden Funktion $\cos(kx)$. Das bedeutet: wenn $f(x)$ ungerade ist, so ist $a_k = 0$. Ähnliches gilt für b_k . Da $\sin(kx)$ ungerade ist, muss $b_k = 0$ gelten, falls $f(x)$ gerade ist. Zusammengefasst gilt also

$$\begin{aligned} f(x) \text{ ungerade} &\implies a_k = 0 \\ f(x) \text{ gerade} &\implies b_k = 0 \end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen

Ein kurzer, aber wichtiger Trick ist es, die folgenden trigonometrischen Identitäten zu verwenden:

$$\begin{aligned} \sin(k\pi) &= 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z} \\ \cos(k\pi) &= (-1)^k \text{ für } k \in \mathbb{Z} \\ \sin^2(x) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \\ \cos^2(x) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \end{aligned}$$

Die erste Identität sollte klar sein. Die zweite Identität folgt daraus, dass $\cos(k\pi)$ für k ungerade $= -1$ ist, und für k gerade $= 1$. Diese Eigenschaft erfüllt auch $(-1)^k$. Somit sind diese beiden äquivalent.

2.4.2 Beispiele

Beispiel. Berechne die reellen Fourierkoeffizienten von der 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion $f(x) = x$ auf $[-\pi, \pi)$.

Lösung. Die Funktion x ist ungerade. Somit gilt $a_k = 0$. Wir müssen also nur noch b_k berechnen:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx \\ &= \frac{-kx \cos(kx) + \sin(kx)}{\pi k^2} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi k^2} (\sin(k\pi) - \pi k \cos k\pi) \end{aligned}$$

Da $k \in \mathbb{N}$ ist, können wir $\sin(k\pi) = 0$ und $\cos(k\pi) = (-1)^k$ setzen. Wir erhalten also

$$b_k = \frac{-2 \cdot (-1)^k}{k}$$

Beispiel. Berechne die reellen Fourierkoeffizienten von der 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0) \\ 1 & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

auf $[-\pi, \pi)$.

Lösung. Die Funktion ist ungerade und somit ist $a_k = 0$. Wir berechnen nun b_k :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx \\ &= \frac{2 \cdot (1 - \cos(k\pi))}{k\pi} = \frac{2 \cdot (1 - (-1)^k)}{k\pi} \end{aligned}$$

In der ersten Gleichung haben wir benutzt, dass $f(x)$ ungerade, und somit $f(x) \sin(kx)$ gerade ist.

Beispiel. Berechne die reellen Fourierkoeffizienten von der 2-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = x^2$$

auf $[-1, 1)$.

Lösung. Wir sehen, dass x^2 gerade ist. Deswegen muss auch $b_k = 0$ gelten. Wir berechnen nun a_k :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 x^2 \cos(k\pi x) dx \\ &= \frac{4}{(k\pi)^2} (-1)^k \end{aligned}$$

wobei wir das Integral per DI-Methode ausgerechnet haben (das Berechnen dieses Integrals wird wärmstens jedem empfohlen). Ausserdem haben wir $\cos(k\pi) = (-1)^k$ gesetzt. Es muss hier explizit noch a_0 berechnet werden, da die Lösung oben für $k = 0$ undefiniert ist. Wir erhalten:

$$a_0 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

2.5 Komplexe Fourierreihe

Häufig ist es einfacher, statt der reellen Fourierreihe die sogenannte komplexe Fourierreihe auszurechnen. Diese bringt a_k und b_k zusammen und wir bringen mittels des komplexen Fourierkoeffizienten die Fourierreihe auf folgende Form:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Man beachte hierbei, dass die Reihe von $-\infty$ bis ∞ geht. Wie erreichen wir diese Form? Der Trick dabei ist, dass wir $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ umschreiben können mittels den Formeln von Euler:

$$\begin{aligned}\cos(kx) &= \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ \sin(kx) &= \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})\end{aligned}$$

Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) + \frac{b_k}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx}\end{aligned}$$

Nun können wir in der zweiten Reihe $-k$ durch k ersetzen, müssen aber dann die Summe genau von $-\infty$ nach -1 laufen lassen. Damit erhalten wir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} e^{ikx}$$

Wenn wir nun den Fourierkoeffizienten c_k definieren als

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases}$$

erhalten wir genau die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Wir haben nun gezeigt, wie wir aus den reellen Fourierkoeffizienten zum komplexen Fourierkoeffizient kommen. Manchmal ist es aber andersrum einfacher. Es lässt sich nämlich zeigen, dass für 2π -periodische Funktionen ($T = 2\pi$) gilt

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Die reellen Fourierkoeffiziente können wir dann berechnen mit den folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}a_k &= c_k + c_{-k} \\a_0 &= 2c_0 \\b_k &= i(c_k - c_{-k})\end{aligned}$$

2.5.1 Allgemeine Periode

Für allgemeine Perioden T ist die Fourierreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2k\pi i x/T}$$

und die Fourierkoeffizienten sind dann

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-2\pi k i x/T} dx$$

Wenn wir also die reellen Fourierkoeffizienten berechnen sollten, so ist es manchmal einfacher, die komplexen zuerst zu berechnen und diese dann umzuschreiben. Vor allem Funktionen wie e^{2x} , welche x in der Potenz haben, sollten zuerst mit der komplexen Methode gelöst werden und danach umgewandelt werden. Ein grosser Vorteil der komplexen Fourierreihe ist es, dass wir nur einen Fourierkoeffizienten berechnen müssen, während wir bei den reellen Koeffizienten jeweils zwei berechnen mussten. Ein Nachteil ist aber, dass wir nicht von der Symmetrie (gerade, ungerade) der Funktion profitieren können. Wenn also eine Funktion gerade oder ungerade ist, lohnt es sich die reellen Koeffizienten auszurechnen, da wir dann ebenfalls nur einen ausrechnen müssen (da der andere = 0 wird wegen der Symmetrie).

Beispiel. Berechne die komplexen Fourierkoeffizienten von der 2-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = e^{-x}$$

im Intervall $[-1, 1]$.

Lösung. Wir berechnen den komplexen Fourierkoeffizienten nach der Formel

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x} e^{-\pi k i x} dx \\&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x(1+\pi k i)} dx \\&= -\frac{1}{2+2\pi k i} e^{-x(1+\pi k i)} \Big|_{-1}^1 \\&= -\frac{1}{2+2\pi k i} (e^{-(1+\pi k i)} - e^{1+\pi k i})\end{aligned}$$

Um die Lösung zu vereinfachen, verwenden wir, dass $e^{-\pi ki} = (-1)^k$ und $e^{\pi ki} = (-1)^k$ ist. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2+2\pi ki} \left(\frac{(-1)^k}{e} - (-1)^k e \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{2+2\pi ki} \left(e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

Beispiel. Berechne mit dem komplexen Fourierkoeffizienten von e^{-x} (den du im letzten Beispiel berechnet hast) die reellen Fourierkoeffizienten.

Lösung. Wir berechnen die reellen Fourierkoeffizienten mit den Formeln

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} \\ a_0 &= 2c_0 \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{(-1)^k}{2+2\pi ki} \left(e - \frac{1}{e} \right) + \frac{(-1)^{-k}}{2-2\pi ki} \left(e - \frac{1}{e} \right) \\ &= \left(e - \frac{1}{e} \right) \left(\frac{(-1)^k}{2+2\pi ki} + \frac{(-1)^{-k}}{2-2\pi ki} \right) \\ &= \left(e - \frac{1}{e} \right) \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2 + 1} \\ a_0 &= \left(e - \frac{1}{e} \right) \\ b_k &= i \left(e - \frac{1}{e} \right) \left(\frac{(-1)^k}{2+2\pi ki} - \frac{(-1)^{-k}}{2-2\pi ki} \right) \\ &= \left(e - \frac{1}{e} \right) \frac{(-1)^k \pi k}{\pi^2 k^2 + 1} \end{aligned}$$

Wir verzichten hier darauf, die Resultate gross zu vereinfachen. Man könnte aber sicherlich noch den komplexen Nenner mit seiner Konjugation multiplizieren.

Hinweis (für Studierende, welche die Vorlesung bei Dr. Caspar besuchen): Dieses Beispiel wurde so ähnlich in der Vorlesung behandelt. Dort wurde aber die periodische Fortsetzung für $[0, 1]$ gewählt, während wir hier die periodische Fortsetzung für $[-1, 1]$ haben.

2.6 Zusammenfassung

Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt $\langle a, b \rangle$ ist definiert als eine Abbildung $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (weist also einem paar Vektoren (Elemente des Vektorraums) eine Zahl zu), welche folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$ und $\langle a, \lambda b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (Bilinear)
2. $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ (Symmetrie)
3. $\langle a, a \rangle \geq 0$ und $\langle a, a \rangle = 0$ genau dann wenn $a = 0$ (Positiv definit)

Norm

Eine Norm auf einem reellen Vektorraum ist definiert als eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ sodass die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ (positiv definit)
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Für $v, w \in V$ gilt: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

induzierte Norm

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Orthonormalbasis

Eine Orthonormalbasis ist eine Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, welche die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Reelle Fourierreihe für allgemeines T

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right)$$

wobei die Fourierkoeffizienten gegeben sind durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) dx$$

Symmetrie der Funktion

$$f(x) \text{ ungerade} \implies a_k = 0$$

$$f(x) \text{ gerade} \implies b_k = 0$$

Trigonometrische Identitäten

$$\sin(k\pi) = 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(k\pi) = (-1)^k \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Komplexe Fourierreihe für allgemeines T

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2k\pi i x/T}$$

und die Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-2\pi k i x/T} dx$$

Reelle \implies Komplexe Fourierkoeffizienten

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - i b_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + i b_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases}$$

Komplexe \implies Reelle Fourierkoeffizienten

$$a_k = c_k + c_{-k}$$

$$a_0 = 2c_0$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k})$$

3

Linearisierung von DGL-Systemen

Wichtige Kapitel aus Mathematik I und II: Kapitel 6.6.1, 6.6.2, 7 und evtl. Kapitel 1 aus diesem Skript nochmals wiederholen

3.1 Stationäre Punkte

Sei wieder ein zweidimensionales Differentialgleichungssystem gegeben $y' = F(y)$. Dann haben wir nun eine Möglichkeit im ersten Kapitel gelernt, wie wir hier die Lösung $y(t)$ bestimmen, falls die DGL „schön“ genug ist. In komplizierteren Fällen, wo wir mit Termen wie e^{y_1} oder ähnlicher Art zu tun haben, wird es schwierig sein, eine vollständige Lösung zu berechnen. Vor allem in der Biologie interessiert uns aber manchmal nicht einmal die Lösung, sondern nur wie sich die Lösung für $t \rightarrow \infty$ verhält. Uns interessiert also beispielsweise, bei welcher Menge eines Stoffes sich der Stoffwechsel einpendelt. Das „Einpendeln“ wird in der Mathematik durch sogenannte stationäre Punkte y_∞ beschrieben. Diese sind Punkte, bei denen $y(t)$ für $t \rightarrow \infty$ hinstreben. Da sich dann aber das System genau nicht verändert (also $y' = 0$ gilt), kann ein stationärer Punkt berechnet werden mit dem folgenden Gleichungssystem:

Definition eines stationären Punktes:

$$F(y_\infty) = 0.$$

3.2 Herleitung der Linearisierung

Wie können wir nun aber unser DGL System noch etwas genauer beschreiben, als nur die stationären Punkte zu berechnen? Der Trick ist es dabei, ein schon bekanntes Tool für Approximationen zu verwenden, die Taylorreihen. Wir wissen, dass unsere Lösung $y(t)$ dem stationären Punkt entspricht plus einem Term, welcher abhängig ist von der Zeit, aber gegen $t \rightarrow \infty$ verschwindet. Wir machen also folgenden Ansatz:

$$y(t) = y_\infty + h(t)$$

wobei $h(t)$ genau unser t -abhängiger Teil ist. Wir erhalten dann

$$y'(t) = (y_\infty + h(t))' = F(y_\infty + h(t)) = y'_\infty + h'(t).$$

Man bemerke, dass y'_∞ natürlich = 0 ist, da sich die stationäre Lösung nicht ändert. Es bleibt also

$$h'(t) = F(y_\infty + h(t))$$

übrig. Nun kommt die Taylorapproximation ins Spiel. Es lässt sich (ohne Beweis) zeigen, dass die Taylor-Reihe bis zur ersten Ordnung genau

$$h'(t) = DF(y_\infty)h(t)$$

ist. Dabei ist

$$DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(y_\infty)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1(y_\infty)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2(y_\infty)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2(y_\infty)}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

die sogenannte Jacobi-Matrix. Die Lösung von $h(t)$ ist dann nach Kapitel 1 aus diesem Skript:

$$h(t) = e^{DF(y_\infty)t}h_0$$

mit $h_0 = h(0)$. Da nun $h(t) = y(t) - y_\infty$ gilt (siehe Ansatz), folgt dann die Linearisierung (versuche diese Rechnung selbst nachzuvollziehen):

Linearisierung von $y'(t) = F(y(t))$:

$$y(t) = y_\infty + e^{DF(y_\infty)t}(y_0 - y_\infty)$$

wobei $y_0 = y(0)$.

3.3 Satz von Hartman-Grobman

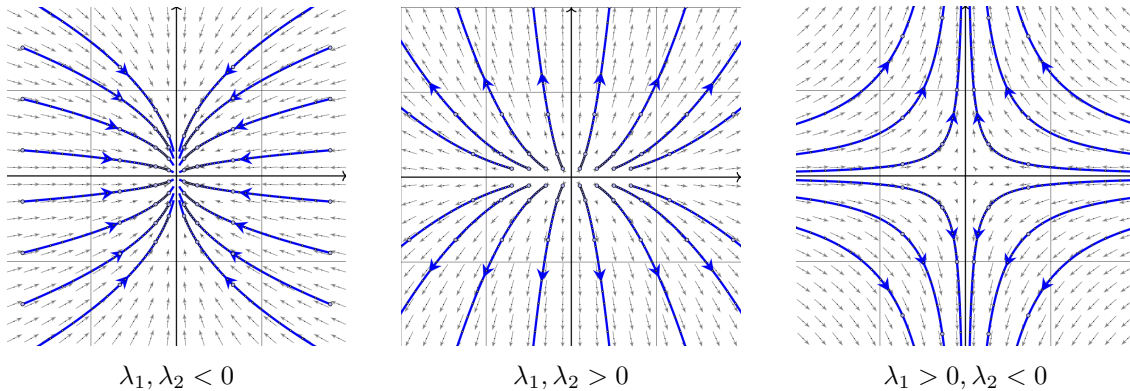
Ist die Linearisierung nun wirklich eine gute Approximation unserer Lösung? Die Antwort auf diese Frage liefert der Satz von Hartman-Grobman:

Satz. (vereinfachter Satz von Hartman-Grobman) Sei F ein Vektorfeld mit $y' = F(y)$ und Fixpunkt y_∞ . Falls die Eigenwerte der Jacobi-Matrix $DF(y_\infty)$ den Realteil $\neq 0$ haben, so approximiert die Linearisierung die Lösung von $y(t)$ (in der Nähe von y_∞).

Aus diesem Satz folgt ebenfalls eine weitere Klassifikation des stationären Punktes:

- i) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: stabil
- ii) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: instabil
- iii) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$: Sattelpunkt

In den folgenden Graphen sind die drei Fälle bildlich dargestellt für einen stationären Punkt $(0, 0)^T$:



intuitiver Beweis der Klassifikationen

Wir möchten hier noch kurz einen intuitiven Beweis der Klassifikationen der stationären Punkte geben. Wir haben im letzten Abschnitt die Linearisierung

$$y(t) = y_\infty + e^{DF(y_\infty)t}(y_0 - y_\infty)$$

hergeleitet. Im ersten Kapitel dieses Skriptes haben wir gelernt, dass für $DF(y_\infty)$ diagonalisierbar, die Exponentialmatrix geschrieben werden kann, als eine Linearkombination von den Eigenvektoren, beziehungsweise

$$e^{DF(y_\infty)t} = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

im Spezialfall von reellen Eigenwerten, die zueinander unterschiedlich sind. Wir setzen dies nun in unsere Lösung $y(t)$ ein und erhalten:

$$y(t) = y_\infty + (C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2)(y_0 - y_\infty)$$

Was geschieht nun, wenn sowohl λ_1 als auch λ_2 negativ sind? Dann verschwinden die Terme $e^{\lambda t}$ und somit haben wir dann nur noch

$$t \rightarrow \infty \quad y(t) = y_\infty + \underbrace{(C_1 e^{\lambda_1 t} v_1)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(C_2 e^{\lambda_2 t} v_2)}_{\rightarrow 0} (y_0 - y_\infty) = y_\infty,$$

also den stationären Punkt übrig. Dieser ist demnach stabil. Falls nun mindestens eines der Eigenwerte λ positiv ist, explodiert einer der Ausdrücke und $y(t)$ wird (teils) instabil.

3.4 Rezept und Beispiele

Wir wollen nun alles was wir bis hierhin gemacht haben in einem Rezept zusammenfassen.

Rezept. (Verhalten einer stationären Lösung (Fixpunkt) untersuchen)

1. Schreibe das Differentialgleichungssystem in die Form

$$y'(t) = F(y)$$

Beachte dabei, dass y ein Vektor ist.

2. Löse das Gleichungssystem $F(y) = 0$ und erhalte stationäre Punkte

$$y_\infty = \begin{pmatrix} y_{1,\infty} \\ y_{2,\infty} \end{pmatrix}$$

3. Berechne nun die Jacobi-Matrix

$$DF(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2(y)}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

und setze dann die stationären Lösungen ein. Wir erhalten also $DF(y_\infty)$.

4. Berechne die Eigenwerte (oder verwende die Tricks im nächsten Abschnitt) und klassifiziere die stationären Punkte wie folgt:

- i) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: y_∞ ist stabil.
- ii) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: y_∞ ist instabil.
- iii) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$: y_∞ ist ein Sattelpunkt.

3.4.1 Tipps und Tricks

Wie schon im Rezept erwähnt, gibt es eine deutlich bessere Methode, die stationären Punkte zu klassifizieren, ohne die Eigenwerte explizit auszurechnen. Dabei brauchen wir zwei Eigenschaften einer Matrix (in diesem Fall 2×2):

1. $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$
2. $\text{Spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$

In unserem Fall ist $A = DF(y_\infty)$. Die Spur einer Matrix ist die Summe aller Elemente in der Diagonalen. Also beispielsweise für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist die Spur gegeben als $\text{Spur}(A) = 1 + 4 = 5$. Was bringen uns jetzt diese zwei Eigenschaften?

1. Fall, $\det(A) < 0$: Hier muss man nicht mehr weiterrechnen. Denn damit $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ gilt, müssen λ_1 und λ_2 verschiedene Vorzeichen haben. Somit ist der stationäre Punkt im Fall $A = DF(y_\infty)$ ein Sattelpunkt.
2. Fall, $\det(A) > 0$: Hier haben wir entweder $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ oder beide negativ. Wir können uns daher die Spur anschauen:
 - i) $\text{Spur}(A) > 0$: Es müssen beide Eigenwerte positiv sein, da die Spur genau die Summe der Eigenwerte ist. Somit ist der stationäre Punkt instabil.
 - ii) $\text{Spur}(A) < 0$: Es müssen beide Eigenwerte negativ sein. Somit ist der stationäre Punkt stabil.

Wir schreiben nun das Rezept um, sodass wir ab jetzt keine Eigenwerte mehr berechnen müssen:

Rezept. (Verhalten einer stationären Lösung (Fixpunkt) untersuchen)

1. Schreibe das Differentialgleichungssystem in die Form

$$y'(t) = F(y)$$

Beachte dabei, dass y ein Vektor ist.

2. Löse das Gleichungssystem $F(y) = 0$ und erhalte stationäre Punkte

$$y_\infty = \begin{pmatrix} y_{1,\infty} \\ y_{2,\infty} \end{pmatrix}$$

3. Berechne nun die Jacobi-Matrix

$$DF(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2(y)}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

und setze dann die stationären Lösungen ein. Wir erhalten also $DF(y_\infty)$.

4. Klassifiziere die stationären Punkte wie folgt:

- i) $\det(DF(y_\infty)) < 0$: y_∞ ist ein Sattelpunkt
- ii) $\det(DF(y_\infty)) > 0$, $\text{Spur}(DF(y_\infty)) < 0$: y_∞ ist stabil
- iii) $\det(DF(y_\infty)) > 0$, $\text{Spur}(DF(y_\infty)) > 0$: y_∞ ist instabil

Wir wollen nun dieses Rezept anhand einiger Beispiele besser verstehen:

Beispiel. Sei folgendes Differentialgleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_1^2 y_2 \\ y_2' &= -y_2 + y_1 y_2 \end{aligned}$$

Untersuche das Verhalten der stationären Punkte von $y(t)$.

Lösung. Wir gehen vor wie im Rezept:

1. Es gilt

$$F(y) = \begin{pmatrix} y_1 - y_1^2 y_2 \\ -y_2 + y_1 y_2 \end{pmatrix}$$

2. Wir berechnen nun die Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} y_1 - y_1^2 y_2 &= 0 \\ -y_2 + y_1 y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wir klammern in der ersten Gleichung y_1 aus und erhalten

$$y_1(1 - y_1 y_2) = 0$$

Eine erste Lösung ist also $y_1 = 0$. Einsetzen von $y_1 = 0$ in die zweite Gleichung liefert $y_2 = 0$ und somit den ersten stationären Punkt

$$y_{\infty,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Gleichung mit y_2 ausgeklammert liefert $y_2(y_1 - 1) = 0$. Also ist $y_1 = 1$ eine zweite Lösung. Eingesetzt in die erste Gleichung erhalten wir $y_2 = 1$ und somit den zweiten stationären Punkt

$$y_{\infty,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Wir berechnen die Jacobi-Matrix und erhalten:

$$DF(y) = \begin{pmatrix} 1 - 2y_1 y_2 & -y_1^2 \\ y_2 & -1 + y_1 \end{pmatrix}$$

4. Wir setzen $y_{\infty,1}$ in $DF(y)$ ein und erhalten

$$DF(y_{\infty,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte lassen sich auf der Diagonalen ablesen: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Somit ist $y_{\infty,1}$ ein Sattelpunkt. Weiter untersuchen wir $y_{\infty,2}$:

$$DF(y_{\infty,2}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist positiv ($= 1$) und die Spur ist $= -1$. Somit ist der zweite stationäre Punkt stabil.

Beispiel. Sei folgendes Differentialgleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} y_1' &= e^{y_2} - e \\ y_2' &= y_1^2 + y_2^2 - 2 \end{aligned}$$

Untersuche das Verhalten der stationären Punkte von $y(t)$.

Lösung. Wir gehen vor wie im Rezept:

1. Es gilt

$$F(y) = \begin{pmatrix} e^{y_2} - e \\ y_1^2 + y_2^2 - 2 \end{pmatrix}$$

2. Wir berechnen nun die Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} e^{y_2} - e &= 0 \\ y_1^2 + y_2^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt direkt $y_2 = 1$. Eingesetzt in die zweite Gleichung erhalten wir $y_1 = \pm 1$ und somit die beiden stationären Punkte:

$$y_{\infty,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_{\infty,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Wir berechnen die Jacobi-Matrix und erhalten:

$$DF(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{y_2} \\ 2y_1 & 2y_2 \end{pmatrix}$$

4. Wir setzen $y_{\infty,1}$ in $DF(y)$ ein und erhalten

$$DF(y_{\infty,1}) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist negativ. Somit ist der stationäre Punkt ein Sattelpunkt. Einsetzen vom zweiten stationären Punkt liefert:

$$DF(y_{\infty,2}) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist positiv ($= 2e$) und die Spur ist ebenfalls positiv ($= 2$). Somit ist der zweite stationäre Punkt instabil.

Beispiel. Sei folgendes Differentialgleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} y_1' &= \sin(y_2) - \cos(y_1) \\ y_2' &= \cos(y_1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Untersuche das Verhalten der stationären Punkte von $y(t)$. Betrachte dabei nur $y_1, y_2 \in [0, \pi)$.

Lösung. Wir gehen vor wie im Rezept:

1. Es gilt

$$F(y) = \begin{pmatrix} \sin(y_2) - \cos(y_1) \\ \cos(y_1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

2. Wir berechnen nun die Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \sin(y_2) - \cos(y_1) &= 0 \\ \cos(y_1) - \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt direkt $y_2 = y_1 = \frac{\pi}{4}$. Dies stimmt auch mit der zweiten Gleichung überein und somit haben wir nur den stationären Punkt:

$$y_\infty = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

3. Wir berechnen die Jacobi-Matrix und erhalten:

$$DF(y) = \begin{pmatrix} \sin(y_1) & \cos(y_2) \\ -\sin(y_1) & 0 \end{pmatrix}$$

4. Wir setzen y_∞ in $DF(y)$ ein und erhalten

$$DF(y_\infty) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist positiv und die Spur ist ebenfalls positiv ($= 1$). Somit ist der stationäre Punkt y_∞ instabil.

4

Partielle Differentialgleichungen

Wichtige Kapitel aus Mathematik I und II: Kapitel 6.4 und 6.5, Kapitel 7.3 und Kapitel 9.3 (Gradient), 9.4. Es ist wichtig, dass du vor diesem Kapitel das Kapitel zu Fourier-Reihen gut verstanden hast.

4.1 Definition und Randbedingungen

Bis jetzt haben wir uns in der Mathematik nur Differentialgleichungen angeschaut, die von einer Variablen abhängig sind. Ein Beispiel davon ist

$$\begin{aligned}y'(t) &= ty(t) \\ y(0) &= 0\end{aligned}$$

wobei hier die Differentialgleichung nur von der Zeit t abhängt. Wir nennen die Bedingung $y(0) = 0$ eine Anfangsbedingung, welche uns später hilft, gegebenenfalls Konstanten zu berechnen, welche durch eine allgemeine Lösung der DGL entstanden ist. Eine DGL welche von einer Variable abhängt nennen wir eine „gewöhnliche“ Differentialgleichung (ODE, ordinary differential equation). In der Natur haben wir aber häufig Funktionen, welche nicht nur von einer Variable abhängig sind. Ein anschauliches Beispiel dafür ist die Temperatur. Diese kann beispielsweise sowohl von der Zeit t abhängig sein, als auch vom Ort x , also $T(x, t)$. Um die Temperaturentwicklung in einem Gebiet Ω beschreiben zu können, benötigen wir ebenfalls Differentialgleichungen. Da unsere Funktion aber nun von zwei Variablen abhängig ist, erhalten wir eine sogenannte partielle Differentialgleichung (PDE). Ein Beispiel einer solchen PDE wäre

$$\begin{aligned}T_t(x, t) &= T_{xx}(x, t) \\ T(x, 0) &= 37 \\ T(x, t) &= 3xt^2, \quad x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

Dabei ist $T_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}T(x, t)$ und somit auch $T_{xx}(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x, t)$. Mit $\partial\Omega$ meinen wir den Rand des Gebiets Ω und nennen deswegen die letzte Bedingung auch Randbedingung. Die Bedingung $T(x, 0) = 37$ nennen wir weiterhin eine Anfangsbedingung. In diesem Kapitel lernen wir nun einige Methoden, mit denen wir PDEs dieser Art lösen können.

4.2 Fouriermethode

4.2.1 Separationsansatz

In der folgenden Methode werden wir zunächst den sogenannten Separationsansatz gebrauchen. Dabei schreiben wir unsere Funktion $u(x, t)$ welche von zwei Variablen abhängig ist als das Produkt zweier Funktionen $X(x)$ und $T(t)$, welche jeweils nur von einer Variable abhängig sind, also

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Wieso ist dieser Ansatz nützlich für unsere PDEs? Schauen wir uns folgendes Beispiel an:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] \\ u(x + 2\pi, t) &= u(x, t). \end{aligned}$$

Wir verwenden den Separationsansatz und erhalten

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Nun setzen wir diesen Ansatz in unsere PDE ein und erhalten

$$\frac{d}{dt}X(x)T(t) = \frac{d^2}{dx^2}X(x)T(t)$$

Da $X(x)$ nicht von t abhängig ist, können wir dieses vor die Ableitung stellen und das gleiche auch für $T(t)$ auf der rechten Seite tun. Dann erhalten wir

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

Wir bringen nun alles, was mit t zu tun hat, auf die linke, und alles, was mit x zu tun hat, auf die rechte Seite:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Was hat uns das nun gebracht? Die linke Seite ist nur von t abhängig, während die rechte Seite nur von x abhängig ist. Aber damit beide Seiten gleich sind, müssen beide Seiten konstant sein. Denn etwas, was von x abhängig ist, kann nicht gleich sein, wie etwas, was von t abhängig ist. Wir wählen die Konstante $c := -w^2$ (es wird später erklärt, wieso genau das negative Vorzeichen und das Quadrat) sodass

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -w^2$$

Nun können wir zwei neue gewöhnliche Differentialgleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} T'(t) &= -w^2T(t) \\ X''(x) &= -w^2X(x) \end{aligned}$$

Die erste DGL ergibt die Lösung

$$T(t) = Ce^{-w^2t}$$

und die zweite DGL ergibt (mit bekannten Methoden):

$$X(x) = \tilde{A} \sin(wx) + \tilde{B} \cos wx$$

Die Bedingung $c = -w^2$ haben wir wegen dieser zweiten DGL gewählt. Hätten wir c positiv gewählt, so wäre keine periodische Funktion $X(x)$ entstanden. Dies ist aber wegen der letzten Bedingung (Randbedingung) nötig. Das Quadrat wählen wir so, damit wir im \sin oder \cos keine Wurzel stehen haben. Wir haben die Periode 2π genau dann, wenn $w = 2\pi n/L$ ist (wobei L die Periode ist) also in unserem Fall $w = n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten also

$$u(x, t) = X(x)T(t) = (\tilde{A} \sin(nx) + \tilde{B} \cos(nx))Ce^{-n^2t}$$

Man kann nun das Ganze vereinfachen, indem man $A := \tilde{A} \cdot C$ neudefiniert und $B := \tilde{B} \cdot C$ ebenfalls. Wir erhalten dann

$$u(x, t) = (A \sin(nx) + B \cos(nx))e^{-n^2t}$$

und nennen diese Lösung unsere „Basislösung“.

4.2.2 Superposition

Da die PDE und die Randbedingungen linear und homogen sind, können wir aber auch eine sogenannte Superposition von unseren Basislösungen haben (für verschiedene n). Eine Superposition ist einfach die Summe verschiedener Basislösungen. Die allgemeine Lösung ist daher gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx))e^{-n^2t}.$$

Unsere Randbedingung haben wir schon genutzt. Nun möchten wir noch unsere Anfangsbedingung verwenden, um A_n und B_n zu bestimmen. Wir setzen $t = 0$ in unsere allgemeine Lösung ein und erhalten

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx)) \stackrel{!}{=} f(x).$$

Diese Reihe kennen wir aus dem Kapitel der Fourierreihen. Dies **ist** eine Fourierreihe. Die A_n und B_n sind genau die Fourierkoeffizienten von $f(x)$. Wir haben also die Konstanten berechnet durch die Fourierreihe von $f(x)$ und erhalten somit unsere Lösung $u(x, t)$.

4.2.3 Rezept

Wir möchten die Fouriermethode nun in einem Rezept zusammenfassen:

Rezept. (Lösen einer PDE mithilfe der Fouriermethode)

1. Separationsansatz: Teile $u(x, t)$ auf in ein Produkt zweier Funktionen $X(x)$ und $T(t)$, also

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

und setze dies in die PDE ein.

2. Stelle die PDE nun so um, dass du auf einer Seite alles mit $X(x)$ und seinen Ableitungen hast und auf der anderen Seite $T(t)$.
3. Setze dann beide Seiten gleich einer Konstanten $-w^2$, falls zweite Ableitungen vorkommen, und sonst einfach gleich der Konstante c .
4. Du erhältst nun zwei ODE welche du lösen kannst. Im Allgemeinen helfen folgende zwei Lösungsansätze:

$$\begin{aligned} g'(t) = ag(t) &\implies g(t) = Ce^{at} \\ f''(x) = -w^2 f(x) &\implies f(x) = A \sin(wx) + B \cos(wx) \\ h''(x) = w^2 h(x) &\implies h(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx} \end{aligned}$$

5. Mache Gebrauch von deiner Randbedingung. Falls beispielsweise $u(0, t) = 0$ eine Randbedingung ist, dann untersuche nur $X(0) = 0$ und finde so w beziehungsweise c . Die Konstante w sollte von $n \in \mathbb{N}$ abhängig gemacht werden.
6. Die Basislösung ist dann $u(x, t) = X(x)T(t)$. Schaue nun, ob du Konstanten zusammenführen kannst. Vor allem Konstanten der Form $A \cdot C$ können zu einer Konstanten fusioniert werden. Die allgemeine Lösung ist

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$$

wobei die Koeffizienten $A \rightarrow A_n$ nun von n abhängig gemacht werden.

7. Berechne die Fourierreihe der Anfangsbedingung. Falls du in der Basislösung $u(x, t)$ nur Sinus-Funktionen stehen hast, dann erweitere zuerst die Anfangsbedingung zu einer ungeraden Funktion. Falls nur Cosinus-Funktionen vorkommen, erweiterst du die Anfangsbedingung zu einer geraden Funktion.
8. Stelle nun die allgemeine Lösung mit der Anfangsbedingung (meist $t = 0$) gleich der Fourierreihe der Anfangsbedingung und berechne so die Konstanten A_n, B_n (=Fourierkoeffizienten):

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X(x)T(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \dots = \text{Fourierreihe von Anfangsbedingung}$$

4.2.4 Beispiele

Beispiel. Löse die folgende partielle Differentialgleichung nach $u(x, y)$ auf:

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\u(x, 0) &= 2 \sin(2x) + 4 \sin(5x) \quad (AB) \\u(0, y) = u(\pi, y) &= 0 \quad (RB) \\u_y(x, 0) &= 0 \quad (RB)\end{aligned}$$

Lösung. Wir gehen nach dem Rezept vor:

1. Sei also $u(x, y) = X(x)Y(y)$, dann gilt eingesetzt in die PDE

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

2. Wir stellen die Gleichung um und erhalten:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

3. Wir setzen die Gleichung gleich eine Konstante $-w^2$ und erhalten somit:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -w^2$$

4. Dies können wir nun gebrauchen, um zwei einzelne ODEs aufzustellen:

$$\begin{aligned}X''(x) &= -w^2 X(x) \\Y''(y) &= w^2 Y(y)\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ergibt die Lösung:

$$X(x) = A \sin(wx) + B \cos(wx)$$

und die zweite Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Mit bekannten Methoden aus Mathematik I erhalten wir

$$Y(y) = Ce^{wy} + De^{-wy}$$

5. Wir setzen nun die Randbedingung $u(0, y) = 0$ ein und erhalten:

$$X(0) = B = 0$$

Da ausserdem $\sin(w\pi) = 0$ gilt, erhalten wir $w = n$ wobei $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$X(x) = A \sin(nx).$$

Aus der zweiten Randbedingung erhalten wir

$$Y'(y) = 0 = n(C - D) \implies D = C$$

6. Die Basislösung ist

$$u(x, y) = C(e^{ny} + e^{-ny}) \sin(nx)$$

wobei wir AC zu einer Konstanten C zusammengeführt haben. Die allgemeine Lösung ist

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (e^{ny} + e^{-ny}) \sin(nx)$$

7. Dieser Schritt kann hier übersprungen werden, da $2 \sin(2x) + 4 \sin(5x)$ schon in „Fourier-Reihen“-Form ist.

8. Wir setzen nun die Anfangsbedingung ein und erhalten

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot C_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} 2 \sin(2x) + 4 \sin(5x)$$

Wie wir sehen, bleiben nur $n = 2$ und $n = 5$ übrig und somit $C_n = 0$ für alle $n \neq 2, 5$ und $C_2 = 1$ bzw. $C_5 = 2$ (Hälfte, da wir einen Faktor von 2 haben). Zusammensetzen von allem ergibt dann die Lösung

$$u(x, y) = (e^{2y} + e^{-2y}) \sin(2x) + 2(e^{5y} + e^{-5y}) \sin(5x).$$

Beispiel. Löse die folgende partielle Differentialgleichung nach $u(x, y)$ auf:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -u_t \\ u(x, 0) &= 1, \quad \forall x \in [0, \pi) \quad (AB) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \quad (RB) \end{aligned}$$

Lösung. Wir gehen nach dem Rezept vor:

1. Sei also $u(x, t) = X(x)T(t)$, dann gilt eingesetzt in die PDE

$$X''(x)T(t) = -X(x)T'(t)$$

2. Wir stellen die Gleichung um und erhalten:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{T(t)}$$

3. Wir setzen die Gleichung gleich eine Konstante $-w^2$ und erhalten somit:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{T(t)} = -w^2$$

4. Dies können wir nun gebrauchen, um zwei einzelne ODEs aufzustellen:

$$\begin{aligned} X''(x) &= -w^2 X(x) \\ T'(t) &= w^2 T(t) \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ergibt die Lösung:

$$X(x) = A \sin(wx) + B \cos(wx)$$

und die zweite Gleichung ergibt

$$T(t) = C e^{w^2 t}$$

5. Wir setzen nun die Randbedingung $u(0, t) = 0$ ein und erhalten:

$$X(0) = B = 0$$

Da ausserdem $\sin(w\pi) = 0$ gilt, erhalten wir $w = n$ wobei $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$X(x) = A \sin(nx).$$

6. Die Basislösung ist

$$u(x, y) = C e^{n^2 t} \sin(nx)$$

wobei wir AC zu einer Konstanten C zusammengeführt haben. Die allgemeine Lösung ist

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{n^2 t} \sin(nx)$$

7. Damit wir C_n bestimmen können, müssen wir die Funktion $\tilde{f}(x) = 1$ irgendwie als Fourierreihe darstellen können. Wir bemerken, dass nur $\sin(nx)$ in der allgemeinen Lösung vorkommt und somit müssen wir 1 als ungerade Funktion periodisch fortsetzen, also

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi) \\ -1 & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Da die Funktion ungerade ist, ist $a_n = 0$ und wir müssen nur b_n ausrechnen:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx \\ &= \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \end{aligned}$$

wobei wir die Tricks aus dem Kapitel der Fourier-Reihen benutzt haben.

8. Die Anfangsbedingung lautet

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin(nx)$$

es gilt also $C_n = b_n = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}$ und somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} e^{n^2 t} \sin(nx).$$

Alternativ kann beim Fourierkoeffizienten auch eine Fallunterscheidung durchgeführt werden, also:

$$\frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann erhält man die Fourierreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x)$$

und somit

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x) e^{-(2n+1)^2 t}.$$

Bemerkungen zu weiteren Methoden

Es gibt auch andere Methoden, die Anfangsbedingung einzusetzen. Diese werden in diesem Skript aber nicht behandelt. Grund dafür ist, dass in alten Prüfungen von Prof. Caspar nie eine andere Methode verwendet wurde. Ich empfehle trotzdem das Erlernen von Fouriertransformationen und Laplace-Transformationen, da diese in der Physik verwendet werden.