Tag 3

Aufgabe 1 :

Sei das nicht-lineare DGL-System

$$y_1' = y_1^3 - y_2^3 = F_1(y_1, y_2)$$
$$y_2' = (y_1 + y_2)(1 - y_1) = F_2(y_1, y_2)$$

(a) Bestimme die stationären Punkte des Systems.

(b) Berechne die Jacobi-Matrix $DF(y)$.

(c) Untersuche den stationären Punkt mit $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$ auf Stabilität.

Bitte umblättern!

Aufgabe 2 :

Wir möchten in dieser Aufgabe die Schwingung einer gezupften Saite näher anschauen. Diese soll durch die Funktion $u(x,t)$ beschrieben werden und folgt der PDE $u_{tt} = u_{xx}$. Wenn wir die Seite anzupfen, ist sie wie folgt angespannt:

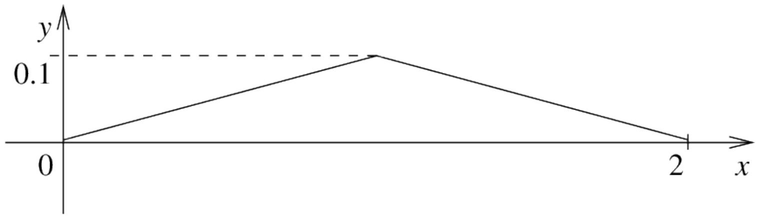

Abbildung 1: Die Seite wird gezupft ($f(x)$: Anfangsbedingung)

Die Funktion ist also

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & x \in [0,1] \\ \frac{1}{10}(2-x) & x \in (1,2] \end{cases}$$

Da die Funktion zunächst ruht, gilt $u_t(x,0) = 0$. Wir fassen die PDE zusammen:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} & \\ u(0,t) &= u(2,t) = 0 & (RB) \\ u_t(x,0) &= 0 & (RB) \\ u(x,0) &= f(x) & (AB) \end{aligned}$$

(a) Führe einen Seperationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ durch und erhalte zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

(b) Löse beide Differentialgleichungen mit den Randbedingungen (RB).

(c) Finde eine Basislösung $u_n(x,t)$.

(d) Superpositioniere die Basislösung und bestimme die fehlenden Koeffizienten mithilfe der Anfangsbedingung.
Hinweis: Setze die Funktion $f(x)$ zunächst zu einer 4-periodischen ungeraden Funktion fort und berechne ihre Fourier-Reihe. Begründe, wieso du dies machst.