Tag 2

Aufgabe 1 :

Sei folgendes Skalarprodukt gegeben:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Die folgenden Polynome sind die ersten drei Legendre-Polynome:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ P_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}x \\ P_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1) \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass die drei Polynome jeweils zueinander orthogonal stehen.

(b) Berechne $\|P_i\|$ für alle $i \in \{0, 1, 2\}$.

(c) Was für eine Aussage kannst du über die in a) und b) berechneten Beziehungen treffen?

Solution:

(a) Wir bemerken, dass sowohl P_0 als auch P_2 gerade sind. P_1 ist ungerade. Wir müssen also nur $\langle P_0, P_2\rangle = 0$ zeigen, da die anderen trivial folgen:

$$\begin{aligned} \langle P_0, P_2\rangle &= \frac{\sqrt{5}}{4}\int_{-1}^{1}(3x^2 - 1)\,dx \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4}(x^3 - x)\Big|_{-1}^{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Die induzierte Norm ist definiert als

$$\|P_i\| = \sqrt{\langle P_i, P_i\rangle}$$

Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\|P_0\|^2 &= \langle P_0, P_0 \rangle \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dx = 1 \\
\implies \|P_0\| &= 1 \\
\|P_1\|^2 &= \langle P_1, P_1 \rangle \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} x^2\, dx = 1 \\
\implies \|P_1\| &= 1 \\
\|P_2\|^2 &= \langle P_2, P_2 \rangle \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{5}{8} (3x^2 - 1)\, dx = 1 \\
\implies \|P_2\| &= 1
\end{aligned}$$

(c) Die Legendre-Polynome bilden eine Orthonormalbasis der Polynome bis zum zweiten Grad $\mathcal{P}_{\leq 2}[x]$.

Aufgabe 2 :

Sei

$$f(x) = A, \quad x \in [0, \pi)$$

wobei A eine Konstante ($A \in \mathbb{R}$) ist.

(a) Setze die Funktion so fort, dass sie 2π-periodisch und ungerade wird.

(b) Berechne die reelle Fourierreihe der 2π-periodisch fortgesetzen Funktion.

(c) Berechne die komplexen Fourierkoeffizienten.

Solution:

(a) Die ungerade 2π-periodische Fortsetzung ist

$$f(x) = \begin{cases} A & x \in [0, \pi) \\ -A & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

(b) Es ist $a_k = 0$ da die Funktion ungerade ist. Wir berechnen nun b_k:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} A\sin(kx)\,dx \\ &= \frac{2(A - A\cos(k\pi))}{\pi k} \\ &= \frac{2A(1-(-1)^k)}{\pi k} \end{aligned}$$

Wir können das Resultat so stehen lassen oder noch eine Fallunterscheidung durchführen:

$$\frac{2A(1-(-1)^k)}{\pi k} = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{4A}{\pi k} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Fourierreihe ist dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A(1-(-1)^k)}{\pi k}\sin(kx)$$

oder

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$$

(c) Die komplexen Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases}$$

also

$$c_k = \begin{cases} \frac{-iA(1-(-1)^k)}{\pi k} & k > 0 \\ 0 & k = 0 \\ \frac{-iA(1-(-1)^k)}{\pi k} & k < 0 \end{cases}$$

beziehungsweise

$$c_k = \frac{-iA(1-(-1)^k)}{\pi k}, \quad \forall k \neq 0.$$