

Tag 3

Aufgabe 1 :

Sei das nicht-lineare DGL-System

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1^3 - y_2^3 = F_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= (y_1 + y_2)(1 - y_1) = F_2(y_1, y_2)\end{aligned}$$

- (a) Bestimme die stationären Punkte des Systems.
- (b) Berechne die Jacobi-Matrix $DF(y)$.
- (c) Untersuche den stationären Punkt mit $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$ auf Stabilität.

Solution:

- (a) Die stationären Punkte erfüllen $F(y_1, y_2) = 0$. Die erste Gleichung ergibt

$$y_1 = y_2 \tag{1}$$

Aus der zweiten Gleichung, folgern wir entweder

$$y_1 = 1 \xrightarrow{(1)} y_2 = 1$$

oder

$$y_1 = -y_2 \xrightarrow{(1)} y_1 = y_2 = 0$$

Somit sind unsere zwei stationären Punkte

$$\begin{aligned}y_\infty &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ y_\infty &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- (b) Die Jacobi-Matrix ist definiert als

$$DF(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2(y)}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

und wir erhalten mit unserem DGL-System

$$DF(y) = \begin{pmatrix} 3y_1^2 & -3y_2^2 \\ 1 - 2y_1 - y_2 & 1 - y_1 \end{pmatrix}$$

- (c) Wir untersuchen also den zweiten Punkt und erhalten mit

$$DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

einen Sattelpunkt (Determinante ist negativ).

Bitte umblättern!

Aufgabe 2 :

Wir möchten in dieser Aufgabe die Schwingung einer gezupften Saite näher anschauen. Diese soll durch die Funktion $u(x, t)$ beschrieben werden und folgt der PDE $u_{tt} = u_{xx}$. Wenn wir die Saite anzupfen, ist sie wie folgt angespannt:

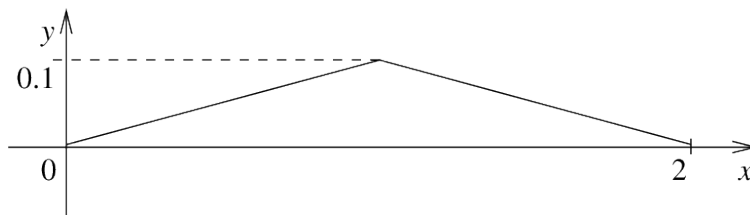


Abbildung 1: Die Saite wird gezupft ($f(x)$: Anfangsbedingung)

Die Funktion ist also

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{10}(2-x) & x \in (1, 2] \end{cases}$$

Da die Funktion zunächst ruht, gilt $u_t(x, 0) = 0$. Wir fassen die PDE zusammen:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \\ u(0, t) &= u(2, t) = 0 & (RB) \\ u_t(x, 0) &= 0 & (RB) \\ u(x, 0) &= f(x) & (AB) \end{aligned}$$

- Führe einen Separationsansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ durch und erhalte zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.
- Löse beide Differentialgleichungen mit den Randbedingungen (RB).
- Finde eine Basislösung $u_n(x, t)$.
- Superpositioniere die Basislösung und bestimme die fehlenden Koeffizienten mithilfe der Anfangsbedingung.

Hinweis: Setze die Funktion $f(x)$ zunächst zu einer 4-periodischen ungeraden Funktion fort und berechne ihre Fourier-Reihe. Begründe, wieso du dies machst.

Solution:

- (a) Es gilt

$$\begin{aligned} T''(t)X(x) &= T(t)X''(x) \\ \frac{T''(t)}{T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -w^2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}T''(t) &= -w^2 T(t) \\X''(x) &= -w^2 X(x)\end{aligned}$$

(b) Wir lösen mithilfe der bekannten Methoden:

$$\begin{aligned}T(t) &= A \sin(wt) + B \cos(wt) \\X(x) &= C \sin(wx) + D \cos(wx)\end{aligned}$$

Wir setzen nun die Randbedingung ein und erhalten

$$\begin{aligned}X(0) &= D = 0 \\X(2) &= C \sin(2w) = 0 \implies w = \frac{n\pi}{2}\end{aligned}$$

und die Funktion ist 4-periodisch, wobei $n \in \mathbb{N}$. Die zweite Randbedingung kann nun eingesetzt werden und wir erhalten

$$\begin{aligned}T'(t) &= nA \cos(wt) - nB \sin(wt) \\T'(0) &= wA = 0 \implies A = 0\end{aligned}$$

Wir erhalten also zusammengefasst

$$\begin{aligned}T(t) &= B \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right) \\X(x) &= C \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\end{aligned}$$

(c) Die Basislösung ist gegeben durch

$$u_n(x, t) = X(x)T(t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

wobei wir B und D zu einer Konstanten A_n zusammengeführt haben.

(d) Die Superposition der Basislösungen ergibt die allgemeine Lösung

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

Die Anfangsbedingung ergibt:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \stackrel{!}{=} f(x)$$

Wir müssen unsere Funktion also zu einer 4-periodischen ungeraden Funktion fortsetzen, da wir nur Sinus-Terme übrig haben und die Funktion wegen der ersten Randbedingung automatisch 4-periodisch ist (siehe b)). Wir erhalten:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, 2] \\ -f(x) & x \in [-2, 0] \end{cases}$$

Wir möchten nun die Fourierkoeffizienten bestimmen und rechnen:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \\ &= \int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{10}x \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + \int_1^2 \frac{1}{10}(2-x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \\ &= \frac{2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \pi n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{5\pi^2 n^2} - \frac{2 \sin(\pi n) - 2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \pi n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{5\pi^2 n^2} \\ &= \frac{4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{5\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir also die allgemeine Lösung

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right).$$