

Harry's

Mathematik III PVK

Tag 1 (1. + 2. Halbtag)

3. Januar 2025

Winter 2019, Aufgabe 1

1. Kompartimentmodell

[15 Punkte]

Seien a, b, c, p, q, r reelle Zahlen mit $a, b, c, p, q, r > 0$ und seien

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad Z(t) = \begin{pmatrix} re^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } A = \begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ 0 & -b-c & p \\ 0 & c & -p-q \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}.$$

Das lineare inhomogene DGL-System $y'(t) = Ay(t) + Z(t)$, $t \in \mathbb{R}$, beschreibe die Entwicklung der Menge einer Substanz in den Kompartimenten K_1, K_2, K_3 :

K_1

K_2

K_3

- (a) Zeichnen Sie in das obige Kompartimentmodell beschriftete Pfeile ein (Richtung beachten!), sodass dadurch das DGL-System $y'(t) = Ay(t) + Z(t)$ beschrieben wird. [2 Punkte]

Winter 2023, Aufgabe 1

1.MC2 [1 Punkt] Sei $V = M_{4 \times 4}$ der Vektorraum der 4×4 - Matrizen mit reellen Einträgen.

Welche Dimension hat der Unterraum $U = \{A \in V \mid A^\top = -A\}$? Dabei bezeichnet $A^\top$ die transponierte Matrix.

- (A) $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$
- (B) $\dim_{\mathbb{R}} U = 6$
- (C) $\dim_{\mathbb{R}} U = 8$
- (D) $\dim_{\mathbb{R}} U = 16$

Sommer 2023, Aufgabe 1

1.MC2 [1 Punkt] Sei $V = \mathcal{P}_{\leq 4}$ der Vektorraum der Polynom-Funktionen vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten. Welche Dimension hat der Unterraum U , welcher von den Polynomen

$$\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x^2 - 1, p_4(x) = x^3 + 4\}$$

erzeugt wird?

- (A) $\dim_{\mathbb{R}} U = 1$
- (B) $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$
- (C) $\dim_{\mathbb{R}} U = 4$
- (D) $\dim_{\mathbb{R}} U = 3$

Sommer 2023, Aufgabe 1

1.MC3 [1 Punkt] Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Dann ist der fehlende Eigenwert $\lambda_3 \dots$

- (A) $\lambda_3 = 4$
- (B) $\lambda_3 = 3$
- (C) $\lambda_3 = 2$
- (D) $\lambda_3 = 1$

1.MC4 [1 Punkt] Welches J kommt als Jordan Normalform von A in **1.MC3 oben** infrage?

- (A) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$
- (B) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$
- (C) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$
- (D) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Winter 2021, Aufgabe 1

1. (a) [4 Punkte]

Sei B eine 2×2 - Matrix mit Jordanscher Normalenform $J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- i. Begründen Sie, warum $a = -1$ sein muss.
- ii. Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ das Matrix-Exponential e^{tJ} .

(b) [5 Punkte]

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Seien J wie in Teil (a) und $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dann ist die Gleichung $AT = TJ$ erfüllt.

Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_A$ des Systems $y' = Ay$.

Winter 2021, Aufgabe 2

(b) [8 Punkte]

Sei $\mathcal{P}_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 auf $[-1, 1]$. Für $p, q \in \mathcal{P}_{\leq 2}$ ist das

Skalarprodukt $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$.

Seien p, q gegeben durch $p(x) = x^2 + x + 1$ und $q(x) = ax + 1$, wobei $a \in \mathbb{R}$.

- i. Bestimmen Sie $a < 0$ so, dass q die Länge $\sqrt{8}$ hat.
- ii. Bestimmen Sie a so, dass p und q orthogonal sind.

Sommer 2023, Aufgabe 2

2.A2 [5 Punkte] Gegeben sei $(\mathcal{P}_{\leq 3}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

(i) Für eine Konstante c bilden die Vektoren

$$\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2 - 1/3, p_4(x) = x^3 - cx\}$$

eine **orthogonale** Basis $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie c .

(ii) Für den Vektor $q(x) = x^2 - x \in \mathcal{P}_{\leq 3}$ sei $[q(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor bezüglich der

Basis $\mathcal{B}$ in Teilaufgabe (i). Bestimmen Sie die fehlenden Einträge X und Y .

Notieren Sie Ihre Lösungen in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer **2.A2**.

Sommer 2023, Aufgabe 2

2.MC1 [1 Punkt] Sei f die Funktion mit $f(x) = d \cdot x^2$, einer Konstanten d und $x \in [-\pi, \pi[$.

Für welches d hat die Fortsetzung den Fourier-Koeffizienten $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$?

- (A) $d = \frac{1}{2}$
- (B) $d = -\frac{1}{2}$
- (C) $d = 2$
- (D) $d = -2$

Winter 2021, Aufgabe 2

2. (a) [7 Punkte]

Sei $g : [-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, mit $g(x) = x$. Diese setzen wir mit Periode 2 zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ periodischen Funktion f fort. Bestimmen Sie für f

- i. die reellen Fourier-Koeffizienten a_n und b_n .
- ii. die komplexen Fourier-Koeffizienten c_n .