

Harry's

Mathematik III PVK

Tag 2 (3. Halbtag)

4. Januar 2025

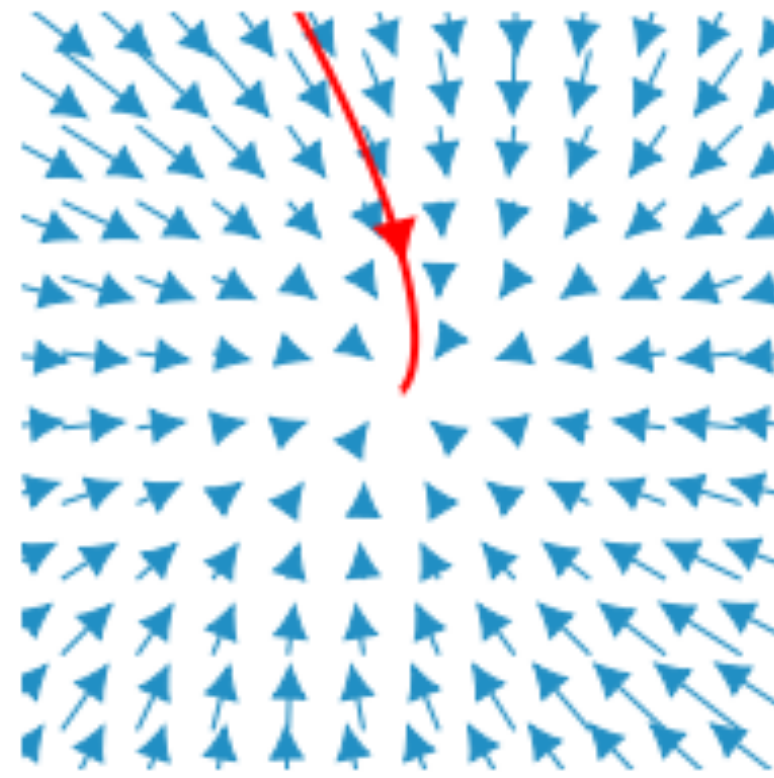
Sommer 2023, Aufgabe 2

2.A1 [4 Punkte] Sei f die Funktion mit $f(x) = x^2$ und $0 \leq x < 1$.

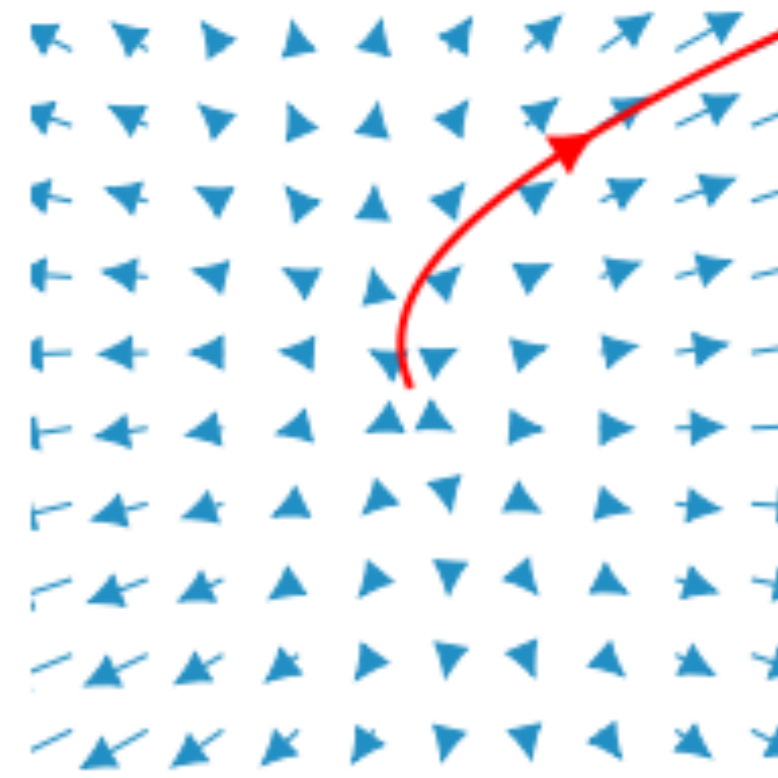
- (i) Skizzieren Sie den Graphen der ungeraden Fortsetzung f_u für $-4 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1** und geben Sie dort auch die Periode von f_u an.
- (ii) Berechnen Sie den komplexen Fourier-Koeffizienten c_0 dieser Funktion f_u .

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1**.

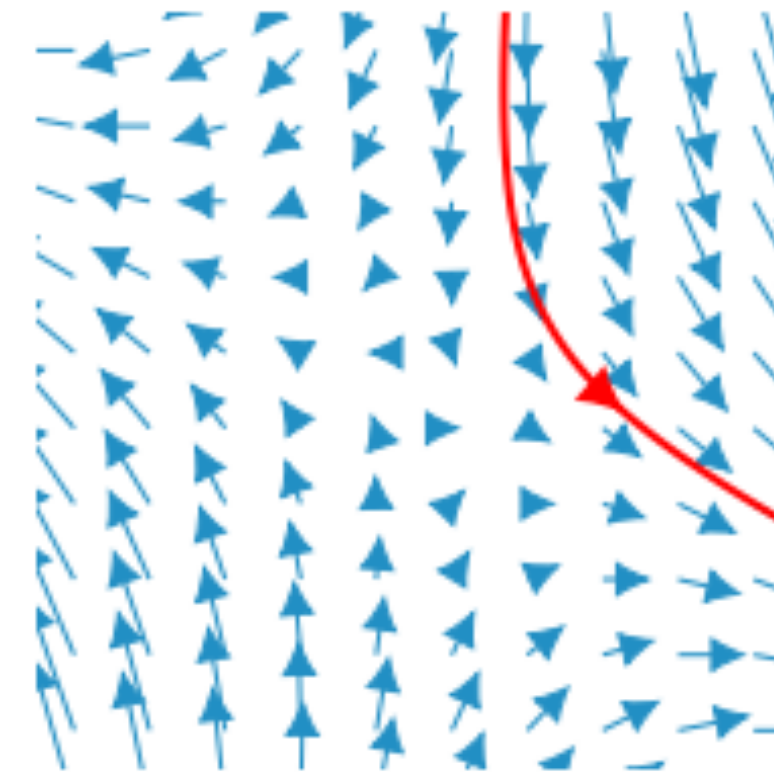
Für reelle Eigenwerte λ_1, λ_2 der Matrix A unterscheiden wir die drei Fälle:



$\lambda_1, \lambda_2 < 0$:
“stabil”

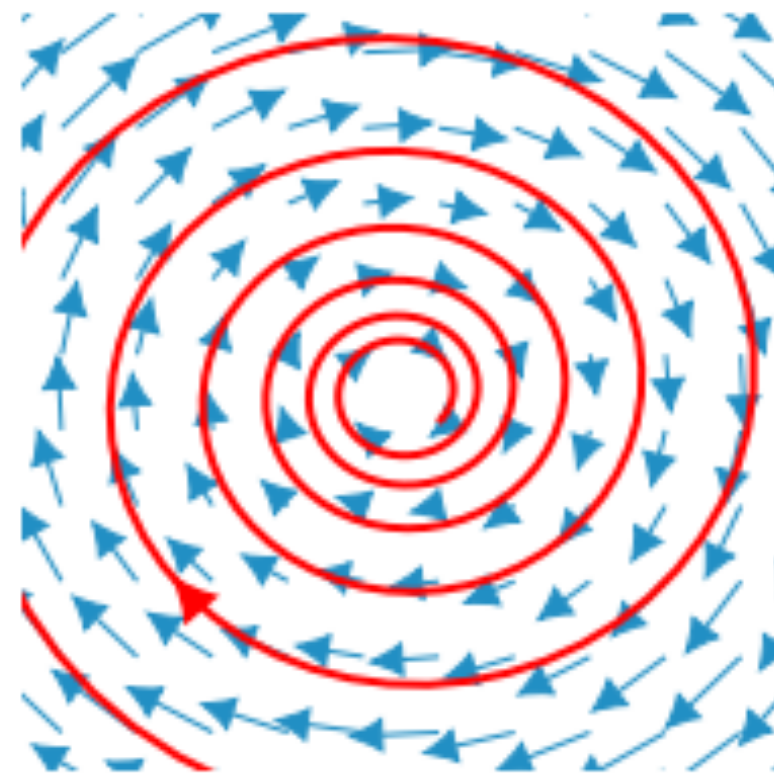


$\lambda_1, \lambda_2 > 0$
“instabil”

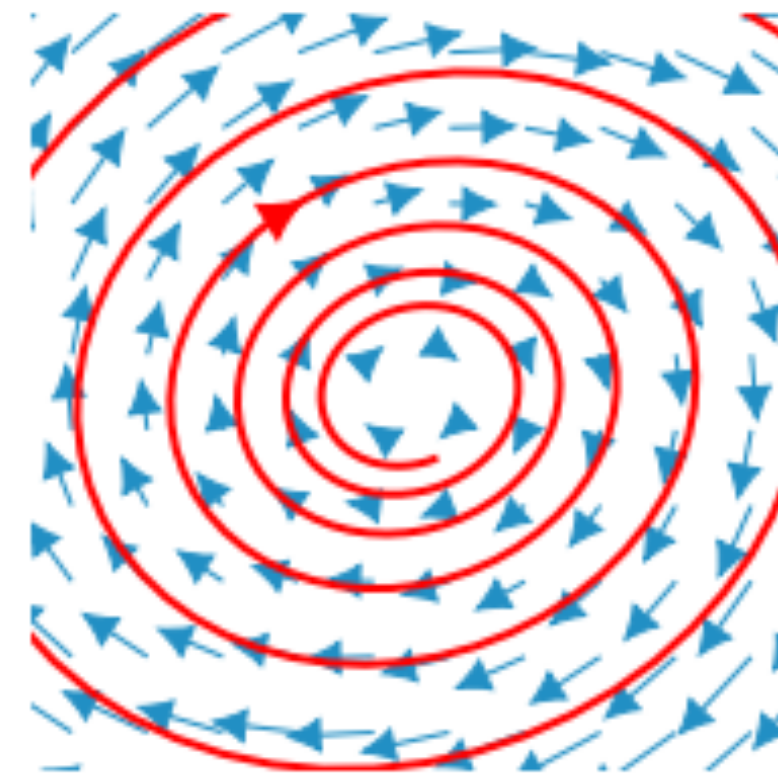


$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
“Sattelpunkt”

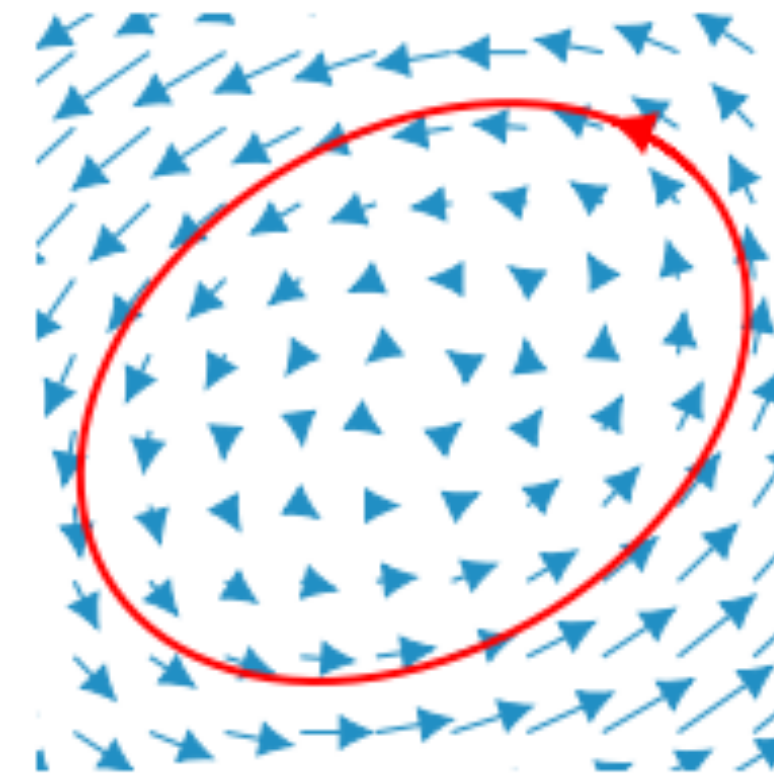
Für komplexe EW λ_1, λ_2 mit $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ haben wir auch drei Fälle.



negativer Realteil:
“stabil”



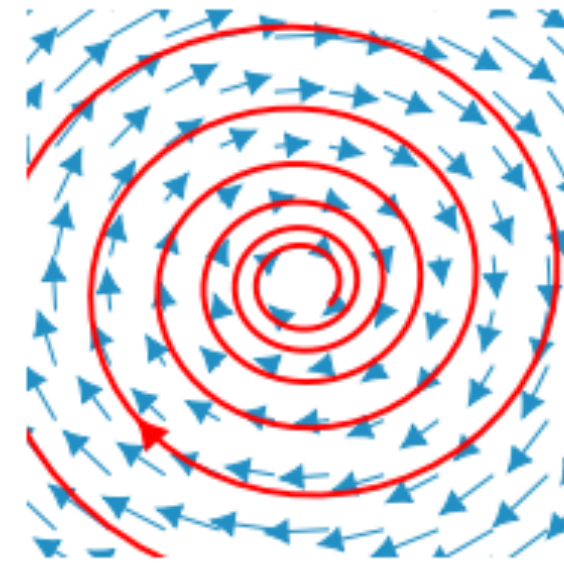
positiver Realteil:
“instabil”



rein imaginär:
“Zentrum”

Winter 2023, Aufgabe 3

3.MC2 [1 Punkt] Sei $y' = F(y)$ ein nichtlineares System mit stationärer Lösung y_∞ und Jacobi-Matrix $DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$. Für welches β sieht die Lösungskurve in der Nähe von y_∞ qualitativ folgendermassen aus?



- (A) $\beta = 0$
- (B) $\beta = -1$
- (C) $\beta = -2$
- (D) $\beta = -4$

Sommer 2023, Aufgabe 3

3.A1 [2 Punkte] Gegeben sei das System $y' = F(y)$ mit

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ und } F(y) = \begin{pmatrix} y_1 y_2 + y_1^2 \\ \cos(y_1) + \sin(y_2) \end{pmatrix}.$$

Im Quadrat $\{(x, y) \mid -\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi\}$ hat das System drei Fixpunkte.

Zeichnen Sie **zwei von diesen** in das Koordinatensystem **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1**.

Sommer 2023, Aufgabe 3

3.A2 [4 Punkte] Gegeben sei folgendes System $\begin{pmatrix} S' \\ I' \end{pmatrix} = F(S, I)$ mit $c, w > 0$ konstant und:

$$\begin{aligned} S'(t) &= wS(t)I(t) - wI(t), \\ I'(t) &= -cS(t)I(t) + wS(t). \end{aligned}$$

- (i) Bestimmen Sie den Fixpunkt (S_∞, I_∞) mit $I_\infty > 0$.
- (ii) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $DF(S_\infty, I_\infty)$, und beschreiben Sie das Verhalten einer Lösung, welche nahe beim Fixpunkt (S_∞, I_∞) startet?

Winter 2021, Aufgabe 3

3. Wir betrachten für ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ ein nichtlineares System $x'(t) = F(x(t))$ mit

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= F_1(x_1(t), x_2(t)) = 2^{x_1(t)} x_2(t) - 2x_2(t), \\ x_2'(t) &= F_2(x_1(t), x_2(t)) = x_1(t) - x_2(t)^2. \end{aligned}$$

- (a) [3 Punkte]

Bestimmen Sie die Fixpunkte (stationäre Lösungen) des Systems.

- (b) [2 Punkte]

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $DF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$.

Hinweis: Es ist $2^x = e^{\ln(2)x}$.

- (c) [3 Punkte]

Sei $x_\infty = \begin{pmatrix} x_{\infty,1} \\ x_{\infty,2} \end{pmatrix}$ der Fixpunkt mit $x_{\infty,1} > 0$ und $x_{\infty,2} > 0$. Untersuchen Sie das Verhalten einer Lösung in der Nähe des Fixpunktes x_∞ .

Sommer 2021, Aufgabe 4

4. Wir modellieren die zeitliche Entwicklung einer Entzündung in einem Organ durch die partielle Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} + \lambda u. \quad (\text{PDE})$$

Dabei ist $u(x, t)$ der Grad der Entzündung zur Zeit t an der Stelle $x \in [0, \pi]$ und $\lambda > 0$ ein Mass für die Reproduktionsrate der Erreger. Am Rand des Organs sei die Entzündung für $t > 0$ durch den Einfluss eines Antiphlogistikums unter Kontrolle, das heisst es gilt

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{für alle } t > 0. \quad (\text{RB})$$

Zur Zeit $t = 0$ hat die Entzündung das Organ gleichmässig erfasst:

$$u(x, 0) = 1 \quad \text{für } 0 < x < \pi. \quad (\text{AB})$$

- (a) **[3 Punkte]**

Führen Sie einen Separationsansatz $u(x, t) = T(t)X(x)$ in (PDE) durch, um je eine gewöhnliche Differentialgleichung für $X(x)$ und für $T(t)$ zu erhalten. Achten Sie darauf, dass für X periodische Lösungen entstehen.

- (b) **[3 Punkte]**

Bestimmen Sie die Lösungen $X_n(x)$, welche den Randbedingungen (RB) gehorchen.

- (c) **[2 Punkte]**

Finden Sie für jede Lösung $X_n(x)$ eine Lösung $T_n(t)$ um die Basislösungen $u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x)$ zu erhalten.

- (d) **[7 Punkte]**

Superponieren Sie die Basislösungen, also

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n T_n(t) X_n(x),$$

und bestimmen Sie die Koeffizienten B_n so, dass die Anfangsbedingung (AB) erfüllt ist. Für welche Werte von λ geht die Entzündung im Laufe der Zeit zurück?