1 Lösung Serie 1. Aufgabe 4 c)

Gesucht ist eine Matrix mit einen Lösungsraum bestehend aus zwei gegebenen Basisvektoren. Wir wissen also schoneinmal, da die Vektoren vierdimensional sind und wir nur zwei Vektoren haben, dass wir zwei freie Parameter haben und die Matrix folglich eine $\mathbb{R}^{2\times 4}$ Matrix ist.

$$Ax = A(s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}) = 0 \tag{1}$$

$$Ax = x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + x_3 a^{(3)} + x_4 a^{(4)} = 0 \tag{2}$$

Da wir zwei Vektoren haben können wir diese für x einsetzen und bekommen ein Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ a^{(3)} \\ a^{(4)} \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

Dieses Gleichungssystem können wir nun ganz normal lösen. Allerdings sind jetzt die x_i keine Zahlen sondern selbst Vektoren. Die beiden Vektoren $a^{(3)}, a^{(4)}$ sind frei wählbar. Die Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}$ erhalten wir aus dem Gleichungssystem. Man beachte dass die Vektoren wie vorher bereits festgestellt, zweidimensional sind. (Da die Matrix $\mathbb{R}^{2\times 4}$ sein soll)

$$a^{(2)} = \frac{1}{7}\left(9a^{(3)} - 2a^{(4)}\right) \tag{4}$$

$$a^{(1)} = 2a^{(2)} - 5a^{(3)} + 3a^{(4)} \tag{5}$$

bzw. für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$a^{(4)} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ a^{(3)} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},\ a^{(2)} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9c - 2a \\ 9d - 2b \end{pmatrix},\ a^{(1)} = \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 9c - 2a \\ 9d - 2b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5c \\ 5d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix} \tag{6}$$

In den Musterlösungen wurde $a = 0, b = 1, c = 7, d = 1$ frei gewählt. Wenn man nachrechnet erkennt man, dass man die gleichen Werte bekommt. Also in diesem Beispiel die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 9 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$