Beispiel 11. (Fallunterscheidung) Wir haben hier ein LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + a^2x_3 &= 2 \\ ax_1 + x_2 + a^2x_3 &= 2 \\ a^2x_1 + ax_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Frage: Für welche Werte von a hat das LGS eine, keine, unendlich viele Lösungen?

ZUERST IM MATRIXSCHREIBWEISE:

ZSF :)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 2 \\ a & 1 & a^2 & 2 \\ a^2 & a & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{II} - a\text{I}]{\text{III} - a^2\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 2 \\ 0 & 1-a^2 & a^2(1-a) & 2(1-a) \\ 0 & a(1-a^2) & 1-a^4 & 2(1-a^2) \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III} - a\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 2 \\ 0 & 1-a^2 & a^2(1-a) & 2(1-a) \\ 0 & 0 & 1-a^3 & 2(1-a) \end{array}\right]$$

$\longrightarrow$ FALLUNTERSCHEIDUNG:

FALL $a \neq 0$:

FALL $a = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2 FREIE PARAMETER

$x_3 = t \in \mathbb{R}$

$x_2 = s \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ RÜCKWÄRTS EINSETZEN: $x_1 = 2 - t - s$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 2-t-s \\ s \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

FALL $a = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1 FREIER PARAMETER

$\Longrightarrow x_2 = t \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ RÜCKWÄRTSEINSETZEN:

III: $x_3 = 2$

I: $x_1 = t$

$1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 2$

$1 \cdot x_1 - 1 \cdot t + 1 \cdot 2 = 2$

$x_1 = t$

$\Longrightarrow$ i) FALSCH

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

FALL $a \neq 0$ ABER $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 0\}$

POLYNOMDIVISION :) $(1-a^3) = (1-a) \cdot x$

$\Longrightarrow$ DIREKT RÜCKWÄRTSEINSETZEN:

$$\text{III}: \quad x_3 = \frac{2(1-a)}{(1-a^3)} = \frac{2\cancel{(1-a)}}{\cancel{(1-a)}(a^2+a+1)} = \frac{2}{a^2+a+1}$$

$$\text{II}: \quad (1-a^2)\, x_2 + a^2 (1-a)\, x_3 = 2(1-a)$$

$$\dots \Longrightarrow x_2 = \frac{2}{a^2+a+1}$$

$$\text{I}: \quad 2 - a x_2 - a^2 x_3 = 2$$

$$\Longrightarrow \dots \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{a^2+a+1}$$

$\rightsquigarrow$ ALSO WAS IST DIE LÖSUNG DES LGS FÜR $a = 0$?