PRÜFUNGSAUFGABE 2020

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

PRÜFUNGSAUFGABE 2020

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

a) $\langle a_1, a_2 \rangle \overset{?}{=} 0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 0 + 1 + 0 = 0$ ✓

$\langle a_1, a_3 \rangle \overset{?}{=} 0$

$\langle a_1, a_4 \rangle \overset{?}{=} 0$ — ANALOG :)

$\langle a_2, a_3 \rangle \overset{?}{=} 0$

$\langle a_2, a_4 \rangle \overset{?}{=} 0$

$\langle a_3, a_4 \rangle \overset{?}{=} 0$

SPALTENVEKTOREN ORTHOGONAL $\not\Rightarrow$ MATRIX ORTHOGONAL

NICHT DIREKT... $\|\cdot\| \overset{!}{=} 1$ ..

⚠

a) GENERELL : 1) SPALTENVEKTOREN ALS MATRIX SCHREIBEN

2) GAUSSEN

3) VOLLER RANG ?

JA : · MATRIX HAT VOLLEN RANG $\Longrightarrow$ SPALTENVEKTOREN SIND LINEAR UNABHÄNGIG.

NEIN : $\Longrightarrow$ SPALTENVEKTOREN SIND NICHT LINEAR UNABHÄNGIG.

ALTERNATIV : AUS ORTHOGONALITÄT (a) $\Longrightarrow$ LIN. UNABHÄNGIGKEIT .

ZWISCHENFRAGE :

→ WAS IST DIE QR- ZERLEGUNG VON EINER ORTHOGONALEN MATRIX B ?

$$\boxed{B = Q \cdot R \quad = B \cdot I}$$

ORTHOGONAL

ORTHOGONAL (= B)

$\overset{!}{=}$ IDENTITÄT !

1. **[6 Punkte]** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

LETZTE WOCHE :)

c) A HAT DA BEREITS ORTHOGONALE SPALTENVEKTOREN.

⟶ ABER, DIE EUKLIDISCHEN NORMEN SIND (NOCH) UNGLEICH 1 :/

⟹ ALSO IST A (NOCH) NICHT ORTHOGONAL! SONST WÄRE DIE QR-ZERLEGUNG ZU EASY :)

⟶ WIR NORMIEREN DIE SPALTENVEKTOREN EINZELN ... UND MULTIPLIZIEREN DIE JEWEILIGEN EINHEITSVEKTOREN DER IDENTITÄTSMATRIX DAMIT.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{R}$$

MIT $\|a_1\| = 2$

$\|a_2\| = \sqrt{2}$

$\|a_3\| = \sqrt{2}$

$\|a_4\| = 2$

FINITO :)