FLASHEXAM - 2 / HS 2017

W08 – JANATTER

4. [6 Punkte] Seien $\mathcal{G}_3 = \operatorname{span}\{1, t^2, t^4\}$ und $\mathcal{U}_2 = \operatorname{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}_3$ nach $\mathcal{U}_2$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{G}_3 & \longrightarrow & \mathcal{U}_2 \\ & x(t) & \longmapsto & t\,x''(t), \end{array}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}_3$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}_2$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t\,x''(t)$.

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) [1 Punkt] Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ beziehungsweise $\mathcal{U}_2$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 + t^2, \qquad p_2(t) = 1 - t^2, \qquad p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$$

und

$$q_1(t) = t, \qquad q_2(t) = 3\,t + 2\,t^3.$$

d) [2 Punkte] Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ aus Teilaufgabe **c)** beschrieben wird?

4. [6 Punkte] Seien $\mathcal{G}_3 = \operatorname{span}\{1, t^2, t^4\}$ und $\mathcal{U}_2 = \operatorname{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}_3$ nach $\mathcal{U}_2$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{G}_3 & \longrightarrow & \mathcal{U}_2 \\ & x(t) & \longmapsto & t\,x''(t), \end{array}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}_3$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}_2$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t\,x''(t)$.

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) [1 Punkt] Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ beziehungsweise $\mathcal{U}_2$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 + t^2, \qquad p_2(t) = 1 - t^2, \qquad p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$$

und

$$q_1(t) = t, \qquad q_2(t) = 3t + 2t^3.$$

d) [2 Punkte] Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ aus Teilaufgabe **c)** beschrieben wird?

a) LIN. UNABHÄNGIGE ABBILDUNG FALLS: ← THEORIE VON WOCHE 06 :)

I : $\mathcal{A}(x(t) + y(t)) = \mathcal{A}(x(t)) + \mathcal{A}(y(t))$

II : $\mathcal{A}(\alpha x(t)) = \alpha \mathcal{A}(x(t))$

I : $\longrightarrow$ $\mathcal{A}(x(t) + y(t)) = \mathcal{A}(x(t)) + \mathcal{A}(y(t))$

$= t\,(x+y)''(t)$

$= t\,x''(t) + t\,y''(t)$

$= \mathcal{A}(x(t)) + \mathcal{A}(y(t))$ ✓ ADDITIVITÄT GEZEIGT :)

II : $\longrightarrow$ $\mathcal{A}(\alpha x(t)) \overset{?}{=} \alpha\,\mathcal{A}(x(t))$

$= t\,(\alpha x)''(t)$

$= \alpha\, t\, x''(t) = \alpha\,\mathcal{A}(x(t))$ ✓ HOMOGENITÄT GEZEIGT :)

$\Longrightarrow$ AUS I UND II FOLGT, DIE ABBILDUNG IST LINEAR :)

b) HIER SUCHEN WIR EINE MATRIX $\underline{A}$, WELCHE DIE LINEARE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ BESCHREIBT. (BEZÜGLICH DER JEWEILIGEN MONOMIALBASEN VON G_3 NACH U_2)

⤳ ALSO WAS MACHT UNSERE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ MIT DER MONOMIALBASIS VON G_3?

1) → MONOMIALBASISVEKTOREN VON G_3 ABBILDEN

1.1) UND ALS LINEARKOMBINATION VON MONOMIALBASISVEKTOREN ALS U_2 SCHREIBEN.

2) → MATRIXFORM :)

G HAT DIE MONOMIALBASIS $\{1, t^2, t^4\}$

U HAT DIE MONOMIALBASIS $\{t, t^3\}$

$$\underbrace{1}_{\text{BASISVEKTOREN VON } G_3} \xrightarrow{k_B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{KOORDINATEN BZGL. BASIS VON } G_3} : \quad \mathcal{A}(1) = t \cdot 0 = 0 \cdot t + 0 \cdot t^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$t^2 \xrightarrow{k_B} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \quad \mathcal{A}(t^2) = t \cdot 2 = 2 \cdot t + 0 \cdot t^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$t^4 \xrightarrow{k_B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \quad \mathcal{A}(t^4) = t \cdot 12t^2 = 0 \cdot t + 12 \cdot t^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

BASISVEKTOREN VON G_3 | KOORDINATEN BZGL. BASIS VON G_3 | ABBILDUNGEN DER BASISVEKTORE ALS G_3 … | LINEARKOMBINATION ALS BASISVEKTOREN VON U_2 :) | KOORDINATEN BZGL. BASISVEKTOREN VON U_2 :)

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}}}$$

ABBILDUNGSMATRIX :)

c) OB $\{p_1, p_2, p_3\}$ EINE GÜLTIGE BASIS VON G IST, SEHEN WIR WIE FOLGT:

1) p_1, p_2, p_3 ALS LINEARKOMBINATION VON BASISVEKTOREN ALS G SCHREIBEN

2) MATRIXFORM AUFSTELLEN

3) GAUSSEN (IN ZSF BRINGEN)

→ VOLLER RANG?

→ HLGS $Ax = 0$ NUR TRIVIALE LÖSUNG?

JA: LIN. UNABHÄNGIG → DIMENSIONEN-CHECK → GÜLTIGE BASIS :)

NO: NICHT LIN. UNABHÄNGIG → SICHER KEINE BASIS!

⇝ ANALOG FÜR $\{q_1, q_2\}$ UND U...

---

1) ⇝

$$p_1 = 1 + t^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^4 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = 1 - t^2 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^4 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = 1 + t^2 + t^4 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t^2 + 1 \cdot t^4 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) 3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{II - I}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ZSF :)

DIESE MATRIX HAT VOLLEN RANG, ALSO BILDEN $\{p_1, p_2, p_3\}$ EINE BASIS VON G_3 :)

[HLGS HAT NUR TRIVIALE LÖSUNG UND DIMENSIONSCHECK ERFÜLLT FÜR G_3]

---

1) ⇝

$$q_1 = t = 1 \cdot t + 0 \cdot t^3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = 3t + 2t^3 = 3 \cdot t + 2 \cdot t^3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

IST BEREITS ZSF :)

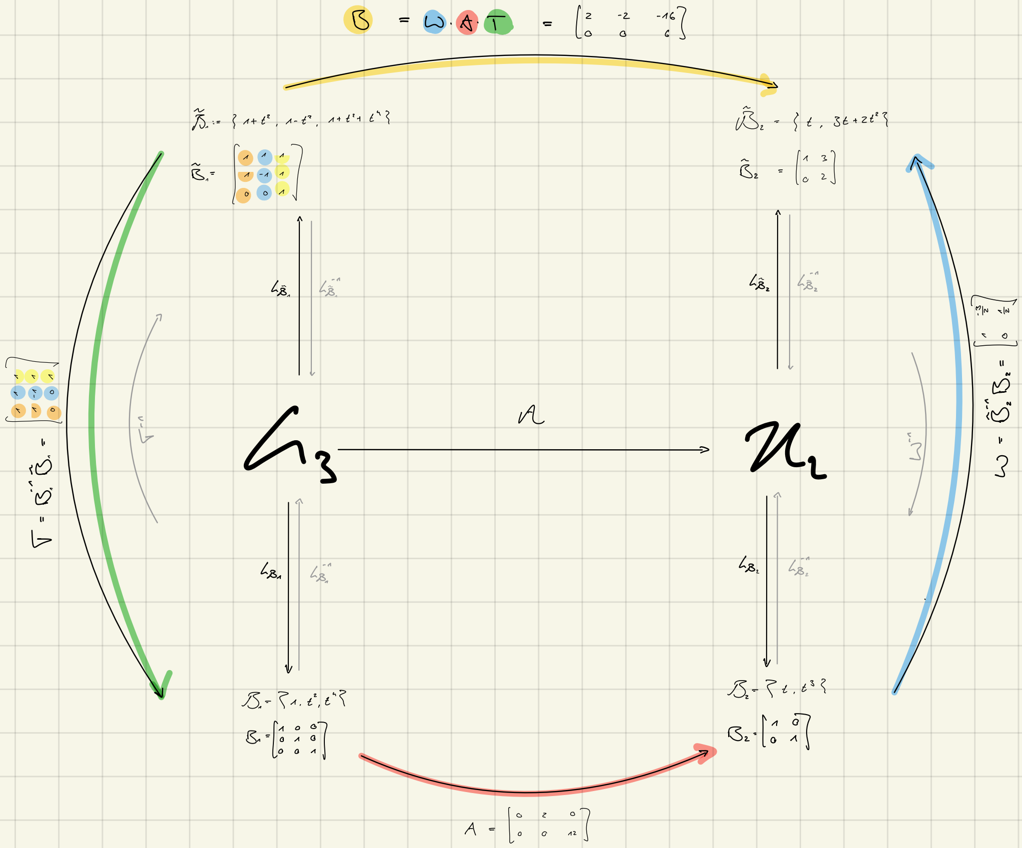
2) 3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

DIESE MATRIX HAT VOLLEN RANG, ALSO BILDEN $\{q_1, q_2\}$ EINE BASIS VON U_2 :)

[HLGS HAT NUR TRIVIALE LÖSUNG UND DIMENSIONSCHECK ERFÜLLT FÜR U_2]

d) [2 Punkte] Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ aus Teilaufgabe **c)** beschrieben wird?



<u>VARIANTE 1</u> : · KOMMUTATIVES DIAGRAMM ZEICHNEN / AUSNUTZEN : $B = W \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

- A HABT IHR BEREITS AUS b)
- T HABT IHR DE FACTO BEREITS AUS c) $(T = \tilde{B}_1$, DA $B_1 = B_1^{-1} = I_3)$
- W IST RELATIV EINFACH ZU BILDEN :

$[\tilde{B}_2 \mid B_2]$

} GAUSS-JORDAN AUF GANZE ZEILEN ODER $\tilde{B}_2^{-1} = W$ DIREKT BERECHNEN.

$(W = \tilde{B}_2^{-1}$, DA $B_2 = B_2^{-1} = I_2)$

$\underline{\underline{[I \mid T]}}$

VARIANTE 2 (LANGSAMER) :

- $\mathcal{A}(1+t^2)$, $\mathcal{A}(1-t^2)$, $\mathcal{A}(1+t+t^2)$ BERECHNEN
- KOORDINATEN-MATRIX BZGL. $\tilde{B}_2 = \{t,\ 3t-2t^2\}$ BILDEN

→ IN DER REGEL SIND DIE KOORDINATEN BZGL. $\tilde{B}_2$ NICHT EINFACH ZU SEHEN, WODURCH IHR NOCHMALS EINEN BASISWECHSEL IN U_2 BRÄUCHTET ...
DAUERT LANGE ...