FLASHEXAM 3 / PROBEPRÜFUNG 2023

9. Bakterienkultur [12 Punkte]

Wir betrachten eine Bakterienkultur, welche exponentiell mit der Zeit wächst. Während eines Vormittags wurde ausgehend von einem Bakterium stündlich die Anzahl Bakterien in der Kultur erfasst. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Uhrzeit:	07:00	08:00	09:00	10:00	11:00
Anzahl:	1	4	32	128	1'024

(35)

DATEN (GEMESSENE WERTE)

t_i	0	1	2	3	ZEIT [h]
s_i	1	3	9	14	ZURÜCKGELEGTE DISTANZ [km]

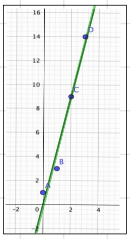
$s(t) = S_A + v \cdot t$

THEORETISCHE BEZIEHUNG

$$\boxed{\underbrace{\underset{\text{KOEFFIZIENTEN}}{\underline{\underline{A}}}\,\underset{\text{UNBEKANNTE}}{\underline{x}}}_{\text{THEORETISCHE WERTE}} - \overset{\text{GEMESSENE WERTE}}{\underline{c}} = \underset{\text{RESIDUUM}}{\underline{r}}}$$

NORMALENGLEICHUNG:

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}$$



$S_A = 0$

$v = 4.5$

FLASHEXAM 3 / PROBEPRÜFUNG 2023 JONATHAN

9. Bakterienkultur [12 Punkte]
Wir betrachten eine Bakterienkultur, welche exponentiell mit der Zeit wächst. Während eines Vormittags wurde ausgehend von einem Bakterium stündlich die Anzahl Bakterien in der Kultur erfasst. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Uhrzeit:	07:00	08:00	09:00	10:00	11:00
Anzahl:	1	4	32	128	1'024

(35)

SCHRITT 0 : EXPONENTIALFUNKTION AUFSCHREIBEN !

ACHTUNG : HIER GIBT ES MEHR ALS EINE VARIANTE !

→ HIER WERDEN FOLGENDE 2 VERWENDET UND VERGLICHEN :

VARIANTE 1 : $f(t) = n \cdot e^{\gamma t}$

VARIANTE 2 : $f(t) = n \cdot 2^{\gamma t}$

→ TIPP : DIE DATEN (UND DER FAKT, DASS WIR KEINEN TR HABEN WERDEN) SPRECHEN EINDEUTIG FÜR VARIANTE 2 !

VARIANTE 1 :

$$f(t) = n \cdot e^{\gamma t}$$

$$\ln[f(t)] = \ln[n \cdot e^{\gamma t}] = \underbrace{\ln[n]}_{:= q} + \underbrace{\gamma}_{:= m} t$$

ACHTUNG : ALLE DATEN (# BAKTERIEN) MÜSSEN ZUERST IN $\ln(\;)$ UMGERECHNET WERDEN

TIPP : · REFERENZZEIT FÜR 1. MESSUNG AUF 0 SETZEN → EINFACHERE BERECHNUNG !

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ln(1) \\ \ln(4) \\ \ln(32) \\ \ln(128) \\ \ln(1024) \end{bmatrix}}_{:= C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{:= A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix}}_{:= x}$$

VARIANTE 2 :

$$f(t) = n \cdot 2^{\gamma t}$$

$$\log_2[f(t)] = \log_2[n \cdot 2^{\gamma t}] = \underbrace{\log_2[n]}_{:= q} + \underbrace{\gamma}_{:= m} t$$

ACHTUNG : ALLE DATEN (# BAKTERIEN) MÜSSEN ZUERST IN $\log_2(\;)$ UMGERECHNET WERDEN

TIPP : · REFERENZZEIT FÜR 1. MESSUNG AUF 0 SETZEN → EINFACHERE BERECHNUNG !

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}}_{:= C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{:= A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix}}_{:= x}$$

EINFACHER :)

NORMALENGLEICHUNG LÖSEN:

$$A^T A \, x = A^T c$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \approx 50.5997 \\ \approx 16.64 \end{bmatrix}$$

GAUSSEN

$$\begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \approx 1.733 \\ \approx -0.1386 \end{bmatrix}$$

RÜCKSUBSTITUTION... $\longrightarrow$

$$m = \gamma$$

$$q = \ln [n_0] \iff n_0 = e^{-0.1386}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{f(t) = e^{-0.1386} \, e^{1.733 \, t}}}$$

NORMALENGLEICHUNG LÖSEN:

$$A^T A \, x = A^T c$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73 \\ 24 \end{bmatrix}$$

GAUSSEN

$$\begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

RÜCKSUBSTITUTION... $\longrightarrow$

$$m = \gamma$$

$$q = \log_2 [n_0] \iff n_0 = 2^{-1/5}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{f(t) = 2^{-1/5} \, 2^{\frac{5}{2} t}}}$$

$$\frac{f(t_2)}{f(t_1)} \overset{!}{=} 2$$

$$\iff \frac{\cancel{2^{-1/5}} \, 2^{\frac{5}{2} t_2}}{\cancel{2^{-1/5}} \, 2^{\frac{5}{2} t_1}} \overset{!}{=} 2$$

$$2^{\frac{5}{2}(t_2 - t_1)} \overset{!}{=} 2 \qquad \Big| \log_2(\;)$$

$$\frac{5}{2}(t_2 - t_1) \overset{!}{=} 1$$

$$\underline{\underline{t_2 - t_1 = \frac{2}{5} \quad \text{(STUNDEN)}}}$$