THEORIE _ W01

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME (LGS)

ÄQUIVALENZ

EXPLIZITE FORM $\Longleftrightarrow$ MATRIX FORM : $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad &\ \ \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\quad\Longleftrightarrow\quad
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{:=\underline{\underline{A}}}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{:=\underline{x}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{:=\underline{b}}$$

BSP 1

$$\begin{aligned}
\text{I}: \quad 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\
\text{II}: \quad x_1 - 4x_2 &= 0
\end{aligned}
\quad\Longleftrightarrow\quad
\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}
\cdot
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Definition 1.1.0.4. Lineares Gleichungssystem (LGS)

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) wird kurz geschrieben als:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\,,$$

wobei **A** die Koeffizientenmatrix, **x** die Unbekannte und **b** die rechte␣Seite ist.

m = #ZEILEN VON A (#GLEICHUNGEN)

n = #SPALTEN VON A (#UNBEKANNTE)

ZEILENSTUFENFORM (ZSF)

EIN LGS STEHT IN DER ZSF, FALLS ES FOLGENDERMASSEN AUSSIEHT:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ 0 \cdot x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & b_1 \\ 0 & * & * & * & b_2 \\ 0 & 0 & * & * & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & * & b_4 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ 0 \cdot x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= b_4 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & b_1 \\ 0 & * & * & * & b_2 \\ 0 & 0 & * & * & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{array}\right]$$

ANALOG. $\Longleftrightarrow$ $\left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & * & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & b_1 \\ 0 & 0 & * & * & b_2 \\ 0 & 0 & * & * & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{array}\right]$ KEINE ZSF!

$\vdots$

$*$: PIVOT-ELEMENTE $\overset{!}{\neq} 0$

: FREIE VARIABLEN (SPÄTER MEHR)

$\rightsquigarrow$ GROSSER VORTEIL (DER ZSF): RÜCKWÄRTSEINSETZEN (BESTIMMUNG DER VARIABLEN $x_1, x_2 \dots x_n$) IST SEHR EINFACH.

GAUSSVERFAHREN : EIN LGS LÖSEN.

ZIEL : $\underbrace{\text{LGS IM ZSF BRINGEN}}_{\text{STEP 1}}$ UND ANSCHLIESSEND $\underbrace{\text{LGS DURCH RÜCKWÄRTSEINSETZEN LÖSEN}}_{\text{STEP 2}}$.

ERLAUBTE OPERATIONEN :
- VERTAUSCHEN VON ZEILEN (ODER SPALTEN)
- VIELFACHES EINER ZEILE (SPALTE) ZU EINER ANDEREN ZEILE (SPALTE) ADDIEREN.

MÖGLICHE LÖSUNGEN :
- EINDEUTIGE LÖSUNG :)
- KEINE LÖSUNG
- UNENDLICH VIELE LÖSUNGEN

BSP 2 : LÖSE FOLGENDES LGS : (EINDEUTIGE LÖSUNG)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

1) WIR SCHREIBEN ZUERST IN MATRIX FORM

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

2) JETZT 'VERGESSEN' WIR DEN X-VEKTOR UND SCHREIBEN :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

3) JETZT STARTEN WIR MIT DEM EIGENTLICHEN RECHNEN :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{II - 2I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{III - I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

KEINE WEITEREN SCHRITTE NÖTIG

WIR ERHALTEN ALS ZSF ALSO :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

ZSF :)

RÜCKWÄRTSEINSETZEN :

III : $1 \cdot x_3 = -2 \implies \underline{\underline{x_3 = -2}}$

II : $-2 \cdot x_2 - 3x_3 = -8$

$\iff -2 \cdot x_2 + 6 = -8$

$\iff \underline{\underline{x_2 = 7}}$

I : $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$

$\iff x_1 + 7 - 4 = 4$

$\iff \underline{\underline{x_1 = 1}}$

$$\left.\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 7 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

FERTIG :)

Bsp 3: Löse folgendes LGS (unendlich viele Lösungen): $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$; $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Wir schreiben wieder als:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

Pivot-Elemente

ZSF :)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{II - 2I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{III - 2I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{III - 2II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Diese Zeile ist komisch.. → nächste Seite :)

⤳ Die III ist immer erfüllt: $0 \cdot x_1 + 0\, x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$

Es gibt also unendlich viele Lösungen. Was nun?

→ Wir führen für x_3 einen beliebigen Parameter $t \in \mathbb{R}$ ein.

Jetzt gilt: $\underline{\underline{x_3 = t}}$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir: $\underline{\underline{x_2 = 1 - 2t}}$

$\underline{\underline{x_1 = 3t - 2}}$

$$\longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 3t-2 \\ 1-2t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}}}$$

Darstellung von Lösungsmengen.

→ ABER WARUM JETZT DIESE PIVOT-ELEMENTE ?

m : ZEILEN
n : SPALTEN

Definition 1.2.0.6. Rang einer Matrix

Der Rang r einer Matrix $\mathbf{A}$, notiert als $\operatorname{Rang}(\mathbf{A})$, ist die Anzahl der Pivote der Matrix nach der Gauss-Elimination.

FALLS $\underline{\text{RANG}(A) = r < m}$ IST SIEHT UNSER LGS WIE FOLGT AUS :

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} * & * & * & * & \cdots & * & b_1 \\ 0 & * & * & * & \cdots & * & b_2 \\ 0 & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & * & b_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+2} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_m \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{RANG } r \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{KOMPATIBILITÄTS/VERTRÄGLICHKEITS-BEDINGUNG (KB)} \end{array}$$

FALLS $\underline{b_{r+1} = b_{r+2} = \cdots = b_m = 0}$: MAN SAGT DAS LGS IST KONSISTENT , ALSO LÖSBAR .

FALLS $\underline{\text{IRGENDEIN } b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_m \neq 0}$: DIE KB SIND NICHT ERFÜLLT, UND DAS LGS NICHT LÖSBAR :/

BSP :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 5 & 8 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & \boxed{5} \end{array}\right]$$

KB

DAS WÜRDE BEDEUTEN, DASS

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$ ↯ 5

$\Longrightarrow$ STIMMT SICHER NICHT

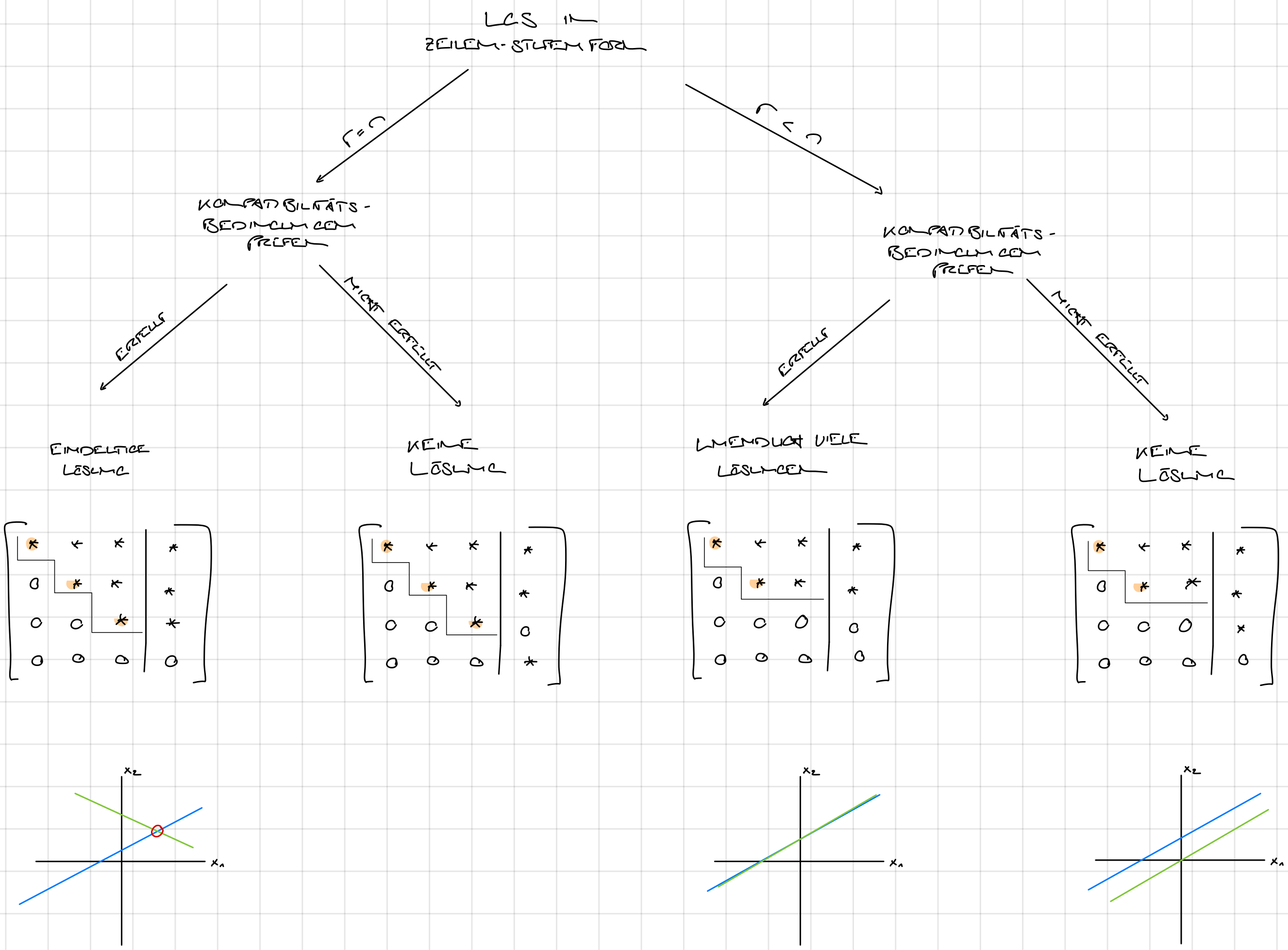
$\Longrightarrow$ NICHT LÖSBAR !

$\Longrightarrow \underline{\mathbb{L} = \emptyset = \{\}}$

LEERE MENGE

Lösungsmenge:

Die Lösungsmengen von LGS sind entweder:
- Eindeutig
- Leer
- Unendlich gross (freie Variablen)



Homogene LGS

Definition 1.2.0.21. Homogenes LGS

Ein lineares Gleichungssystem heisst *homogen*, falls die rechte Seite Null ist:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = 0\,.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \end{array}\right]$$

- HLGS haben dann und nur dann nicht-triviale Lösungen, falls Rang(A) < n, da wir dann freie Variablen finden

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : t \in \mathbb{R} \right\}$$

- Für quadratische Koeffizienten-Matrizen $A^{n \times n}$:

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ heisst *regulär (voller Rang)*

$\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = r = n$

$\Updownarrow$

~~Für jedes $\mathbf{b}$ gibt es mindestens eine Lösung~~

$\Updownarrow$

~~Für jedes $\mathbf{b}$ gibt es genau eine Lösung~~

$\Updownarrow$

$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ hat nur $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als Lösung

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ heisst *singulär (nicht voller Rang)*

$\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = r < n$

$\Updownarrow$

~~Für gewisse $\mathbf{b}$ gibt es keine Lösung~~

$\Updownarrow$

~~Für kein $\mathbf{b}$ gibt es eine eindeutige Lösung~~

$\Updownarrow$

$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ hat nicht triviale Lösungen

MATRIZEN

→ EINE MATRIX IST EINE RECHTECKIGE ANORDNUNG VON ELEMENTEN. THAT'S IT. :)

BSP. $$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- DIE <u>DIMENSIONEN EINER MATRIX</u> BEZEICHNET MAN MIT $\underline{\underline{A}}^{m \times n}$.

  DAS BEDEUTET DIE MATRIX HAT

  - m ZEILEN
  - n SPALTEN

  FALLS $m = n$ NENNEN WIR DIE MATRIX QUADRATISCH.

$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ HAT ALSO DIE DIMENSION $m = 4$, $n = 2$ $\Longrightarrow \underline{\underline{B}}^{4 \times 2}$

- <u>DER RANG (A)</u> $= r$ EINER MATRIX A ENTSPRICHT DER ANZAHL ZEILEN / SPALTEN IN DER ZSF, DIE UNGLEICH NULL SIND. (ALSO ANZAHL PIVOT-ELEMENTE)

  - $r \;\hat{=}\;$ # PIVOT-VARIABELN
  - $n - r \;\hat{=}\;$ # FREIER VARIABELN
  - ES GILT IMMER $0 \le r \le m$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{RANG (A)} = r = 3$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{RANG (B)} = r = 2$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}, \quad \text{RANG (D)} = r = 1$$

FALLS $r < m$ ERHALTEN WIR KOMPATIBILITÄTSBEDINGUNGEN. (WIE VIELE?)

RECHNEN MIT MATRIZEN :

ADDITION : $(\underline{\underline{A}}^{m \times n} \pm \underline{\underline{B}}^{m \times n} = C^{m \times n})$

- ADDITION FOLGT ELEMENTWEISE.
- DIE MATRIZEN MÜSSEN DIESELBE DIMENSION HABEN!

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 4 & 10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \text{NICHT DEFINIERT!}$$

SKALARE MULTIPLIKATION : $(\alpha \cdot \underline{\underline{A}}^{m \times n} = C^{m \times n})$

DIE MULTIPLIKATION ERFOLGT MIT ALLEN ELEMENTEN.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

"KLASSISCHES" SKALARPRODUKT (KORREKTE SCHREIBWEISE)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = \underline{\underline{11}}$$

MATRIXMULTIPLIKATION : $\left(\underline{\underline{A}}^{m \times n} \cdot \underline{\underline{B}}^{n \times p} = C^{m \times p} \right)$

WIR BILDEN DAS SKALARPRODUKT DER ZEILENVEKTOREN VON $\underline{\underline{A}}$ MIT DEN SPALTENVEKTOREN VON $\underline{\underline{B}}$.
DAS ERGEBNIS SCHREIBEN WIR IN DIE MIT A KORRESPONDIERENDE ZEILE, UND IN MIT B KORRESPONDIERENDE SPALTE. ⟶ BEISPIEL :)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{bmatrix}$$

⟶ KONKRET :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ACHTUNG :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \text{NICHT DEFINIERT!}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix}}}$$