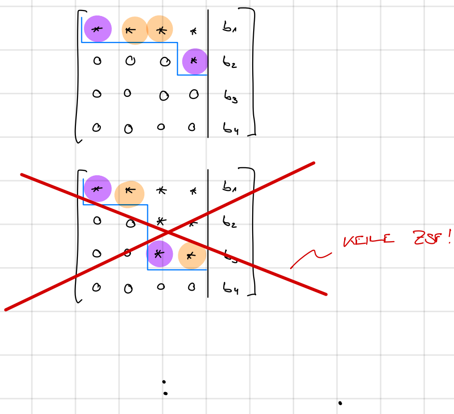
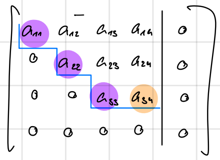
Recap_W01

Zeilenstufenform (ZSF)



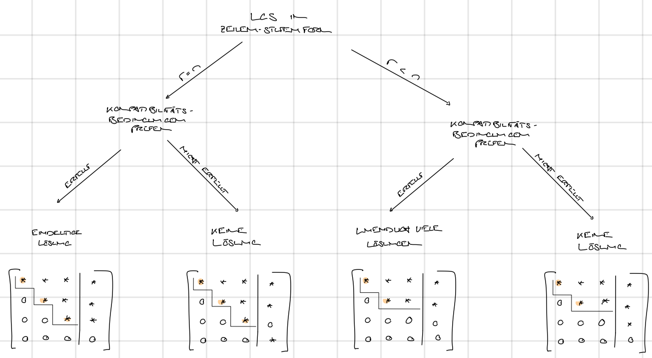
Gaussverfahren

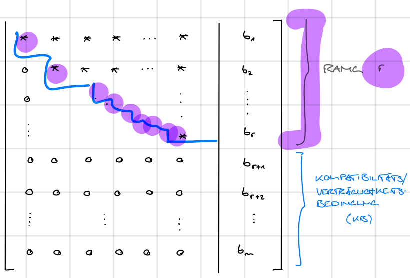
Homogene LGS



$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösungsmenge:





MATRIZEN

→ EINE MATRIX IST EINE RECHTECKIGE ANORDNUNG VON ELEMENTEN. THAT'S IT. :)

BSP. $$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- DIE DIMENSIONEN EINER MATRIX BEZEICHNET MAN MIT $\underline{\underline{A}}^{m \times n}$.

  DAS BEDEUTET DIE MATRIX HAT

  - m ZEILEN
  - n SPALTEN

  FALLS $m = n$ NENNEN WIR DIE MATRIX QUADRATISCH.

$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ HAT ALSO DIE DIMENSION $m = 4$, $n = 2$ $\Longrightarrow$ $\underline{\underline{B}}^{4 \times 2}$

(HERMIT-) TRANSPONIERT: FÜR $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (ODER $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$)

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{BZW.} \quad A^H = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* \end{bmatrix}$$

ZB: $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow B^H = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Definition 1.3.0.3. Symmetriearten von Matrizen

Symmetrisch:
Eine Matrix $\mathbf{A}$ heisst symmetrisch, falls $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Antisymmetrisch:
Eine Matrix $\mathbf{A}$ heisst antisymmetrisch, falls $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Hermite symmetrisch:
Eine Matrix $\mathbf{A}$ heisst Hermite symmetrisch, falls $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$.

- <u>DER RANG (A)</u> $= r$ EINER MATRIX A ENTSPRICHT DER ANZAHL ZEILEN / SPALTEN IN DER ZSF, DIE UNGLEICH NULL SIND. (ALSO ANZAHL PIVOT - ELEMENTE)

  - $r \;\hat{=}\;$ # PIVOT - VARIABELN
  - $n - r \;\hat{=}\;$ # FREIER VARIABELN
  - ES GILT IMMER $0 \leq r \leq m$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{RANG}(A) = r = 3$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}, \quad \text{RANG}(D) = r = 1$$

FALLS $r < m$ ERHALTEN WIR KOMPATIBILITÄTSBEDINGUNGEN (WIE VIELE?)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \qquad \text{RANG}(I_n) = n$$

IDENTITÄTSMATRIX $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

RECHNEN MIT MATRIZEN :

ADDITION : $\left(\underline{\underline{A}}^{m\times n} \pm \underline{\underline{B}}^{m\times n} = C^{m\times n}\right)$

- ADDITION FOLGT ELEMENTWEISE.
- DIE MATRIZEN MÜSSEN DIESELBE DIMENSION HABEN!

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 4 & 10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$ NICHT DEFINIERT!

Satz 1.3.0.6. Eigenschaften der Matrixaddition

Im Folgenden sind einige Eigenschaften der Matrixaddition aufgelistet:

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ *(kommutativ)*,
2. $\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$ *($\mathbf{0}$ ist neutrales Element)*,
3. $\mathbf{A}+(-1)\mathbf{A}=\mathbf{0}$,
4. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ *(assoziativ)*,
5. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathsf{T}}=\mathbf{A}^{\mathsf{T}}+\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathsf{H}}=\mathbf{A}^{\mathsf{H}}+\mathbf{B}^{\mathsf{H}}$.

SKALARE MULTIPLIKATION : $\left(\alpha \cdot \underline{\underline{A}}^{m\times n} = C^{m\times n}\right)$

- DIE MULTIPLIKATION ERFOLGT MIT ALLEN ELEMENTEN.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

"KLASSISCHES" SKALARPRODUKT (KORREKTE SCHREIBWEISE)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^{T} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = \underline{\underline{11}}$$

MATRIXMULTIPLIKATION : $(\underline{\underline{A}}^{m\times n} \cdot \underline{\underline{B}}^{n\times p} = C^{m\times p})$

WIR BILDEN DAS SKALARPRODUKT DER ZEILENVEKTOREN VON $\underline{\underline{A}}$ MIT DEN SPALTENVEKTOREN VON $\underline{\underline{B}}$.
DAS ERGEBNIS SCHREIBEN WIR IN DIE MIT A KORRESPONDIERENDE ZEILE, UND IN MIT B KORRESPONDIERENDE SPALTE. ⟶ BEISPIEL :)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

⟶ KONKRET :
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3\cdot 2 + 4\cdot 0 & 3\cdot 3 + 4\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{bmatrix}}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ACHTUNG :
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}}_{2\times 2} =$$ NICHT DEFINIERT !

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 2 \end{bmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix}}_{2\times 1}$$

Satz 1.3.0.13. Eigenschaften der Matrixmultiplikation

Alle folgenden Sätze gelten unter der Annahme, dass die Dimensionen der einzelnen Matrizen passen. Wir sind also in der Lage, die Matrizen miteinander zu multiplizieren:

1. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ *(assoziativ)*
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ *("·" distributiv bezüglich "+")*
   $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$
3. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$
   $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathsf{H}} = \mathbf{B}^{\mathsf{H}}\cdot\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$
4. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})^{\mathsf{T}} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

2.5 Die Inverse einer Matrix

Definition 17. Eine $n \times n$-Matrix A heisst **invertierbar** (oder **regulär, nicht singulär**) falls es eine Matrix B existiert, so dass

$$A \cdot B = I_n. \tag{2.17}$$

Die Matrix B ist dann die **Inverse** von A und man bezeichnet sie mit A^{-1}. Falls A nicht invertierbar ist, heisst sie **singulär**.

Bemerkung. A^{-1} ist **eindeutig** bestimmt.

2.5.1 Berechnung der Inversen: Gauss-Jordan Algorithmus (Kochrezept)

(I) A und I_n nebeneinander schreiben:

$$(\ A\ )\ (\ I_n\ ) \tag{2.18}$$

(II) Wir wollen **links** die Einheitsmatrix bekommen:

- ZSF links erreichen, mittels bekannter Operationen.
- durch Pivots teilen (um die gesuchte 1 auf den Diagonalen zu erhalten).
- Zeilen vertauschen.

Was sehr wichtig ist, ist dass alle durchgeführten Operationen müssen **beidseitig** angewendet werden(links und rechts)!

(III) Am Ende erhalten wir

$$(\ I_n\ )\ (\ A^{-1}\ ) \tag{2.19}$$

Beispiel 23. Berechnen sie A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

START :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{3\times3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= I_3} \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I}]{\text{II} + \text{I}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 2\text{II}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\cdot\text{III}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II} - \text{III}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{I} + 3\text{II}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_3} \underbrace{\begin{bmatrix} -8 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}\ (3\times3)}$$

DONE :)

CHEATSHEET : INVERSE

Satz 1.4.0.4. Existenz und Eindeutigkeit der Inverse

Die Matrix $\mathbf{A}$ hat eine Inverse genau dann, wenn $Rang(\mathbf{A}) = n$, die Matrix also regulär ist. Ausserdem ist die Inverse eindeutig.

Satz 1.4.0.7. Eigenschaften der Inverse

Seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ invertierbare Matrizen, dann haben sie folgende Eigenschaften:

1. *Wenn gilt, dass $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, dann gilt auch, dass $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$;* HILFREICH BEI ÜBER-PRÜFUNG :)
2. *$\mathbf{A}^{-1}$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$;*
3. *$\mathbf{I}$ ist invertierbar und $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$;*
4. *$\mathbf{AB}$ ist invertierbar und $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;*
5. *$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}$.*

Satz 1.4.0.8. Kriteria für Existenz der Inverse

Für eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *$\mathbf{A}$ invertierbar.*
2. *$Rang(\mathbf{A}) = n$.*
3. *$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ist lösbar für alle $\mathbf{b}$.*
4. *$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

(PLR ZERLEGUNG)

Lu

2.7 LR-Zerlegung

Motivation: LR-Zerlegung ist eine Alternative zur Berechnung der Lösungen eines LGS und ist sehr nützlich wenn man $Ax = b$ für verschiedene b lösen will.

Idee: Man schreibt für eine $n \times n$ Matrix A die Relation $PA = LR$, wo L und R Links-bzw. Rechtsdreiecksmatrizen sind, und P die Permutationsmatrix ist.

2.7.1 Kochrezept

Es sei $Ax = b$ gegeben

(I) Man schreibt I_n und A nebeneinander

$$(I_n) \,\big|\, (I_n) \,\big|\, (A) \qquad (*) \tag{2.31}$$

(II) Man wendet auf A Gauss an bis man die Zeilenstufenform erreicht hat, indem:

- Man wählt die Koeffizienten mit den die Pivotzeilen multipliziert werden müssen **immer** bezüglich der Operation **Subtraktion**, und nicht Summe!

  Bemerkung. Also z.B. $II + 2 \cdot I$ geht nicht, man muss $II - (-2) \cdot I$ schreiben und rechnen!
- Falls man Zeilen- oder Spaltenvertauschungen durchführen muss, macht man sie mit I_n mit.

(III)
- Die in ZSF gebrachte Matrix ist schon R
- Die Matrix L ist wie folgt definiert:
  - (i) L hat Diagonalelemente 1
  - (ii) Links der Diagonalelementen stehen die Koeffizienten aus (II)
  - (iii) Die vertauschte I_n ist P

(IV) Man löst:

- Zuerst $Lc = Pb$ mit **Vorwärtseinsetzen** und man findet c
- Dann $Rx = c$ mit **Rückwärtseinsetzen** und man findet x, die unsere Lösungsmenge ist.

$$(I_n) \,\big|\, (I_n) \,\big|\, (A) \qquad (*)$$

FUTURE $\underline{\underline{P}}$ FUTURE $\underline{\underline{L}}$ FUTURE $\underline{\underline{R}}$

$\rightsquigarrow$ FALLS IHR NUR $LR = A$ BRAUCHT, FOLGT ALS $PA = LR \iff A = \underbrace{P^T L}_{\tilde{L}} R$

Beispiel 27. (*Mit Permutationen*)

Finde L, R, P so dass $LR = PB$ für

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

START : 1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

I_n (FUTURE P) $\quad$ I_n (FUTURE L) $\quad$ B (FUTURE R)

2)

GAUSS ALGORITHMUS*

HIER SOLL KEINE 0 SEIN!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

VERTAUSCHEN AUCH MIT DER 'P'-MATRIX

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

III − 1 · I

KOEFFIZIENT BEZGL. SUBSTRAKTION IM 'L' MATRIX NOTIEREN

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & 1 & 0 & -9 & -8 \end{array}\right]$$

III + 9 II = III − (−9) II

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & 1 & 0 & 0 & -35 \end{array}\right]$$

$\underline{\underline{P}}$ $\quad$ $\underline{\underline{L}}$ $\quad$ $\underline{\underline{R}}$

DIE R-MATRIX IST JETZT IN DER ZSF, WIR SIND FERTIG :)

* FALLS ZEILEN IM 2. SCHRITT VERTAUSCHT WERDEN, WERDEN NUR "ZEILEN"/ELEMENTE UNTERHALB DER L-MATRIX UMGESTELLT (SIEHE SPÄTERES BEISPIEL)