RECAP_W02

MATRIZEN

- HERLEIT - TRANSFORMIEREN
- RANG
- OPERATIONEN

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{B}}^{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^{m \times n} \cdot \underline{\underline{B}}^{n \times p} = C^{m \times p}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

INVERSE

- EXISTENZ
- BERECHNUNG

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^{3\times3}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= I_3}$$

$$\Big\downarrow \quad \text{GAUSS-JORDAN}$$

GAUSSVERFAHREN RUNTER & RAUF

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{I_3}}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -8 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^{-1} \quad (3\times3)}$$

INVERSE

BSP

BERECHNE DIE INVERSE VON $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A}\,\middle|\,\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3}\right] \xrightarrow{I \leftrightarrows III} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right] \xrightarrow[III - 2I]{II - I} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{matrix}\right]$$

$$\xrightarrow{III - \frac{1}{3} II} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-5}{3} \end{matrix}\right] \xrightarrow[3 III]{\frac{1}{3} II} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 3 & -1 & -5 \end{matrix}\right] \xrightarrow{II - \frac{2}{3} III} \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3}\,\middle|\,\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{matrix}}_{\underline{\underline{A^{-1}}}}\right]$$

BERECHNE DIE INVERSE VON $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2} I \\ \frac{1}{\pi} II \\ -\frac{1}{3} III}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-3} \end{bmatrix} = B^{-1}$

(DIAGONALMATRIX)

BERECHNE DIE INVERSE VON $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \pi & 7 & 13 \\ 0 & 10 & 2e & 20 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 4 & 13 & 6 \\ 0 & 5 & e & 10 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{↯}$ ES EXISTIERT KEINE INVERSE

$\iff \det(C) = 0$

BERECHNE DIE INVERSE VON $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \pi & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 4 & 13 & 6 \\ 0 & 5 & e & 10 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{↯}$ ES EXISTIERT KEINE INVERSE

$\iff \det(D) = 0$

CHEATSHEET : INVERSE

Satz 1.4.0.4. Existenz und Eindeutigkeit der Inverse

Die Matrix $\mathbf{A}$ *hat eine Inverse genau dann, wenn* $\mathit{Rang}(\mathbf{A}) = n$, *die Matrix also regulär ist. Ausserdem ist die Inverse eindeutig.*

UND QUADRATISCH $n \times n$

Satz 1.4.0.7. Eigenschaften der Inverse

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *invertierbare Matrizen, dann haben sie folgende Eigenschaften:*

1. *Wenn gilt, dass* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, *dann gilt auch, dass* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$;
2. $\mathbf{A}^{-1}$ *ist invertierbar und* $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$;
3. $\mathbf{I}$ *ist invertierbar und* $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$;
4. $\mathbf{AB}$ *ist invertierbar und* $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
5. $\mathbf{A}^{\top}$ *ist invertierbar und* $(\mathbf{A}^{\top})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\top}$.

HILFREICH
BEI ÜBER-
PRÜFUNG :)

Satz 1.4.0.8. Kriteria für Existenz der Inverse

Für eine $n \times n$ *Matrix* $\mathbf{A}$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $\mathbf{A}$ *invertierbar.*
2. $\mathit{Rang}(\mathbf{A}) = n$.
3. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ist lösbar für alle* $\mathbf{b}$.
4. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *hat nur die triviale Lösung* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(PLR ZERLEGUNG)

LU

2.7 LR-Zerlegung

Motivation: LR-Zerlegung ist eine Alternative zur Berechnung der Lösungen eines LGS und ist sehr nützlich wenn man $Ax = b$ für verschiedene b lösen will.

Idee: Man schreibt für eine $n \times n$ Matrix A die Relation $PA = LR$, wo L und R Links-bzw. Rechtsdreiecksmatrizen sind, und P die Permutationsmatrix ist.

2.7.1 Kochrezept

Es sei $Ax = b$ gegeben

(I) Man schreibt I_n und A nebeneinander

$$(I_n)\Big|\big(\, I_n \,\big)\Big|\big(\, A \,\big) \qquad (*) \tag{2.31}$$

(II) Man wendet auf A Gauss an bis man die Zeilenstufenform erreicht hat, indem:

- Man wählt die Koeffizienten mit den die Pivotzeilen multipliziert werden müssen **immer** bezüglich der Operation **Subtraktion**, und nicht Summe!

  Bemerkung. Also z.B. $II + 2 \cdot I$ geht nicht, man muss $II - (-2) \cdot I$ schreiben und rechnen!
- Falls man Zeilen- oder Spaltenvertauschungen durchführen muss, macht man sie mit I_n mit.

(III)
- Die in ZSF gebrachte Matrix ist schon R
- Die Matrix L ist wie folgt definiert:
  - (i) L hat Diagonalelemente 1
  - (ii) Links der Diagonalelementen stehen die Koeffizienten aus (II)
  - (iii) Die vertauschte I_n ist P

(IV) Man löst:

- Zuerst $Lc = Pb$ mit **Vorwärtseinsetzen** und man findet c
- Dann $Rx = c$ mit **Rückwärtseinsetzen** und man findet x, die unsere Lösungsmenge ist.

$$(I_n)\,\Big|\,(I_n)\,\Big|\,(A) \qquad (*)$$

FÜLLE $\underline{\underline{P}}$ FÜLLE $\underline{\underline{L}}$ FÜLLE $\underline{\underline{R}}$

⇝ FALLS IHR NUR $LR = A$ BRAUCHT, FOLGT ALS $PA = LR \iff A = \underbrace{P^T L}_{\tilde{L}} R$

Beispiel 26. (*Ohne Permutationen*)

Gesucht ist die Lösung von $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -7 & 8 \end{array}\right]$$

$\underline{II} - 3\,\underline{I}$

$\underline{III} - (-1)\,\underline{I}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -8 & 5 \end{array}\right]$$

$\underline{III} - (-2)\,\underline{II}$

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\underline{\underline{P}}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{matrix}}_{\underline{\underline{L}}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}}_{\underline{\underline{R}}}\right]$$

HIER IST $\underline{c}$ DIE UNBEKANNTE.

↝ WIR LÖSEN JETZT $\underline{\underline{L}}\,\underline{c} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b}$ NACH $\underline{c}$ AUF :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow$ $\underline{\underline{c_1 = 1}}$; $\underline{\underline{c_2 = -3}}$; $\underline{\underline{c_3 = -3}}$

$\Longrightarrow$ ALSO : $\underline{\underline{\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}}}$

HIER IST $\underline{x}$ DIE UNBEKANNTE :)

↝ JETZT LÖSEN WIR $\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$ NACH $\underline{x}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow$ $\underline{\underline{\underline{x} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$

← FINITO :)

Beispiel 27. (*Mit Permutationen*)

Finde L, R, P so dass $LR = PB$ für

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

START : 1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

I_n I_n B

(FUTURE P) (FUTURE L) (FUTURE R)

2)

GAUSS ALGORITHMUS*

HIER SOLL KEINE 0 SEIN!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

VERTAUSCHEN AUCH MIT DER 'P'-MATRIX

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$III - 1 \cdot I$

KOEFFIZIENT BEZGL. SUBSTRAKTION IN 'L' MATRIX NOTIEREN

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & 1 & 0 & -9 & -8 \end{array}\right]$$

$III + 9\,II = III - (-9)\,II$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & 1 & 0 & 0 & -35 \end{array}\right]$$

$\underline{\underline{P}}$ $\underline{\underline{L}}$ $\underline{\underline{R}}$

DIE R-MATRIX IST JETZT IN DER ZSF, WIR SIND FERTIG :)

---

* FALLS ZEILEN IN 2t. SCHRITT VERTAUSCHT WERDEN, WERDEN NUR "ZEILEN"/ELEMENTE UNTERHALB DER L-MATRIX MITGETAUSCHT (SIEHE SPÄTERES BEISPIEL)

LU / LDU - ZERLEGUNG (CHOLESKY - ZERLEGUNG)

$$A = LU$$

(LU - ZERLEGUNG WIE LETZTE WOCHE)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & 1 \end{bmatrix} \; ; \; U = \begin{bmatrix} d_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & d_{22} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

BLEIBT GLEICH

$$= LD\tilde{U}$$

RANG(A) = n

FALLS $d_1 \neq 0$
$\vdots$
$d_n \neq 0$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & & & 0 \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{nn} \end{bmatrix} \; ; \; \tilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{d_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{d_{11}} \\ & 1 & \cdots & \frac{u_{2n}}{d_{22}} \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

FALLS A SYMMETRISCH :)
(DA LU-ZERLEGUNG EINDEUTIG)

$$= LDL^T$$

FALLS DAZU ALLE PIVOTE > 0

$$\sqrt{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_{11}} & & & 0 \\ & \sqrt{d_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{d_{nn}} \end{bmatrix} = \sqrt{D}^T$$

$$= L\sqrt{D}\,\sqrt{D}\,L^T$$

$$= L\sqrt{D} \cdot \underbrace{\sqrt{D}^T L^T}_{:= R}$$

$$= R^T R$$

CHOLESKY - ZERLEGUNG :)

EUKLIDISCHE NORM & SKALARPRODUKT

EUKLIDISCHE NORM

- $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots x_n^2} \in \mathbb{R}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \rightsquigarrow \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \ldots |x_n|^2} \in \mathbb{C}$$

SKALARPRODUKT / WINKEL

- $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n , \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = x^T y$$

$$= \|x\| \|y\| \cos(\widehat{x, y})$$

$$\Longleftrightarrow (\widehat{x, y}) = \frac{\operatorname{Arccos}(\langle x, y \rangle)}{\|x\| \|y\|}$$

- $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n , \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \rightsquigarrow \langle x, y \rangle = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \ldots + x_n^* y_n$$

$$= \|x\| \|y\| \cos(\widehat{x, y})$$

$$\Longleftrightarrow (\widehat{x, y}) = \frac{\operatorname{Arccos}(\langle x, y \rangle)}{\|x\| \|y\|}$$

Definition 1.7.0.1. Orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (keiner davon darf Null sein), heissen orthogonal, notiert als $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, falls

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 .$$

ORTHOGONALE MATRIZEN

Definition 1.7.0.2. Orthogonale Matrix

Eine reelle $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ heisst orthogonal, wenn

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}\,.$$

Eine komplexe $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ heisst unitär, wenn

$$\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A} = \mathbf{I}\,.$$

→ A IST INVERTIERBAR UND $A^{-1} = A^{T}$

→ A^{-1} IST ORTHOGONAL

→ SIND A, B BEIDE ORTHOGONAL, SO IST $A \cdot B$ ORTHOGONAL

→ ORTHOGONAL ⟺ ALLE SPALTENVEKTOREN SENKRECHT ZU ALLEN ANDEREN (SKALARPRODUKT = 0)
UND ALLE SPALTENVEKTOREN HABEN $\|\cdot\|_2 \overset{!}{=} 1$.

Satz 1.7.0.6. Erhaltungssatz

Orthogonale Matrizen verändern Längen und Winkel nicht.

↳ BEI MULTIPLIKATION MIT EINEM VEKTOR / MATRIX.

BSP.
- PERMUTATIONSMATRIZEN (ZB. VON PLR - ZERLEGUNG)
- ROTATIONSMATRIZEN
- SPIEGELUNGSMATRIZEN

BEISPIEL : ZEIGE DASS A ORTHOGONAL IST.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

VARIANTE 1 : MATRIZEN MULTIPLIZIEREN : $A^T A \overset{?}{=} I_n$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}_{A^T} = I$$

✓

VARIANTE 2 : BETRAGSQUADRAT BERECHNEN : ORTHOGONAL FALLS :

$$\begin{cases} \|a_1\|_2 = \|a_2\|_2 = 1 \\ a_1 \perp a_2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \|a_1\|_2 &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \\ \|a_2\|_2 &= \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\ \langle a_1 , a_2 \rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

✓

UNITÄRE MATRIZEN

DEFINITION : HERMIT - TRANSPONIERT : A^H

- TRANSPONIERT
- KOMPLEX KONJUGIERT

BSP :

$$A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 3 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

$$A^H = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 1-i & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

EINE QUADRATISCHE KOMPLEXE MATRIX $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ HEISST UNITÄR FALLS :

$$\boxed{A^H A = I \quad \Longleftrightarrow \quad A^H = A^{-1}}$$