RECAP_W03

INVERSE

- BERECHNEN (GAUSS-JORDAN)
- EXISTENZ & EIGENSCHAFTEN

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \underbrace{}_{A} \; \underbrace{}_{I_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right] \quad \underbrace{}_{I_3} \; \underbrace{}_{A^{-1}}$$

ES EXISTIERT GENAU EINE INVERSE

$\Updownarrow$

$A^{n\times n}$ UND $RANG(A) = r = n$

PLR - ZERLEGUNG ($Ax = b$)

- ZERLEGUNG : $PA = LR$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

I_n (FUTURE P) $\quad I_n$ (FUTURE L) $\quad B$ (FUTURE R)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & 1 & 0 & 0 & -35 \end{array}\right]$$

$P \quad L \quad R$

- LÖSEN VON GLS : STEP 1 : $Lc = Pb$
  STEP 2 : $Rx = c$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ * & 1 & 0 & * \\ * & * & 1 & * \end{array}\right] \Longrightarrow c = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

$Lc = Pb$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & c_1 \\ 0 & * & * & c_2 \\ 0 & 0 & * & c_3 \end{array}\right] \Longrightarrow x = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

$Rx = c$

EUKLIDISCHE -

- NORM
- SKALARPRODUKT
- ORTHOGONALE VEKTOREN

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots x_n^2} \in \mathbb{R}$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^T y$$

$$\boxed{\begin{aligned} \langle x, y \rangle = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \perp y \\ &\Longleftrightarrow \quad \widehat{(x, y)} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$

ORTHOGONALE MATRIZEN

Definition 1.7.0.2. Orthogonale Matrix

Eine reelle $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ heisst orthogonal, wenn

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Eine komplexe $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ heisst unitär, wenn

$$\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

→ A IST INVERTIERBAR UND $A^{-1} = A^T$

→ A^{-1} IST ORTHOGONAL

→ SIND A, B BEIDE ORTHOGONAL, SO IST $A \cdot B$ ORTHOGONAL

→ ORTHOGONAL $\Longleftrightarrow$ ALLE SPALTENVEKTOREN SENKRECHT (SKALARPRODUKT = 0) ZU ALLEN ANDEREN
UND ALLE SPALTENVEKTOREN HABEN $\|\cdot\|_2 \overset{!}{=} 1$.

Satz 1.7.0.6. Erhaltungssatz

Orthogonale Matrizen verändern Längen und Winkel nicht.

BEI MULTIPLIKATION MIT EINEM VEKTOR / MATRIX.

BSP. · PERMUTATIONSMATRIZEN (Z.B. VON PLR - ZERLEGUNG)
· ROTATIONSMATRIZEN
· SPIEGELUNGSMATRIZEN

MEHR ODER HELFE :)

BEISPIEL: ZEIGE DASS A ORTHOGONAL IST.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

VARIANTE 1: MATRIZEN MULTIPLIZIEREN: $A^T A \stackrel{?}{=} I_n$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}_{A^T} = I$$

VARIANTE 2: BETRAGSQUADRAT BERECHNEN: ORTHOGONAL FALLS: $\left\{ \begin{array}{l} \|a_1\|_2 = \|a_2\|_2 = 1 \\ a_1 \perp a_2 \end{array} \right.$

$$\|a_1\|_2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\|a_2\|_2 = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

UNITÄRE MATRIZEN

DEFINITION: HERMIT - TRANSPONIERT : A^H

- TRANSPONIERT
- KOMPLEX KONJUGIERT

BSP:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 3 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

$$A^H = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 1-i & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

EINE QUADRATISCHE KOMPLEXE MATRIX $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ HEISST UNITÄR FALLS:

$$\boxed{A^H A = I \iff A^H = A^{-1}}$$

QR - Zerlegung

$$\boxed{A = QR}$$

What?

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (oder $\in \mathbb{C}^{m \times n}$)
- $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (oder $\in \mathbb{C}^{m \times n}$) : obere ZSF / Dreiecksmatrix
- $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (oder $\in \mathbb{C}^{m \times m}$) : orthogonale $m \times m$ Matrix

Why? : · numerisch robustes Lösen von LGS
(keine Rundungsfehler - Annullation)

$$\longrightarrow \quad Ax = b \iff QRx = b \quad | \; Q^{-1}$$
$$\iff Rx = Q^{-1}b$$
$$\iff Rx = Q^{T}b \quad | \; Q^{-1} \overset{\text{orth.}}{=} Q^{T}$$

Schnelles Lösen durch Rückwärtseinsetzen ...

How?

- via Givens - Rotationsmatrizen (Hilfe)
- via Householder - Spiegelungsmatrizen (Hilfe)
- via Gram - Schmidt - Verfahren (später im Semester)

P.S. : Es kann passieren, dass $R = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Falls alle Spalten von A linear unabhängig sind, ist R_0 invertierbar.

QR - Zerlegung via Givens - Rotationsmatrizen

Achtung: Bild nicht mit Skript verwechseln

Ziel: Forme als $A^{m\times n}$ elementweise eine obere ZSF / Dreiecksmatrix $R^{m\times n}$

How?: • Bestimme Indizes des störenden Elementes a_{ij}
(Reihenfolge beachten)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

• Berechne $\cos\phi = \frac{a_{jj}}{r} =: c$ $\quad \sin\phi = \frac{a_{ij}}{r} =: s$ $\quad r = \sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}$ $\quad (r \neq 0)$

• Bilde zu jedem störenden Element eine Givens-Rotationsmatrix $G_{ij}^{m\times m}$

$$G_{ij}(\phi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \leftarrow i\text{-te Spalte bzw. } j\text{-te Spalte} & \leftarrow j\text{-te Spalte bzw. } i\text{-te Spalte} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos\phi & \cdots & \sin\phi & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\sin\phi & \cdots & \cos\phi & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile bzw. } j\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile bzw. } i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

• Multipliziere $G_{ij}\cdot A = \tilde{A}$ (Check: $\tilde{A}$ hat jetzt $\tilde{a}_{ij} = 0$)

• Wiederhole bis $\underbrace{G_k \cdots G_2\, G_{ij}}_{:=Q^T} \cdot A = \underbrace{R}_{:=R}$ $\quad\Longleftrightarrow\quad$ $A = G_{ij}^{-1} \cdot G_2^{-1} \cdot \cdots G_k^{-1} \cdot R$

$$= \underbrace{G_{ij}^T \cdot G_2^T \cdots G_k^T}_{} \cdot R$$

$$= Q \cdot R$$

Beispiel 'QR mit Givens'

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A.

Wir schauen uns zuerst die erste Spalte an :)

→ Wir drehen in der $(1-i)$-Ebene

1. Spalte hier.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

⇝ Wir wollen a_{21} zu Null bringen:

$$\boxed{\begin{aligned} c &= \frac{a_{jj}}{w} \\ s &= \frac{a_{ij}}{w} \\ w &:= \sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2} \end{aligned}}$$

Mit: $i = 2$

$j = 1$

Wir drehen in der $(1-2)$-Ebene.

⟶ Wir bestimmen G_{12} $\Longrightarrow \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = G_{12}$

⇝ $$w := \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$c = \frac{a_{11}}{w} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad s = \frac{a_{21}}{w} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\Longrightarrow G_{12} := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow G_{12} \cdot A = R \Longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 2 \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_{= R}$$

$$G_{12} \cdot A = R \iff \underbrace{G_{12}^{-1} \cdot G_{12}}_{= I} \cdot A = \underbrace{G_{12}^{-1}}_{= G_{12}^T} \cdot R$$

$$A = \underbrace{G_{12}^T}_{:= Q} R$$

$$\underline{\underline{= Q \cdot R}}$$

$$\underline{\underline{Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}} = G_{12}^T$$

QR - Zerlegung via Householder - Spiegelungsmatrizen

Ziel : Forme $A^{m \times n}$ "spaltenweise" eine obere Ecl / Dreiecksmatrix $R^{m \times n}$

How? : · Bestimme "Spalte" x_i - ab Hauptdiagonale
(Reihenfolge beachten)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \cdots$$

zB : $x_2 = \begin{bmatrix} a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$

"ab der Hauptdiagonalen"

· Berechne $v_i = x_i - \|x_i\| \, e_i$

· Bestimme Householder Matrix : $H_i = I - 2 \dfrac{v_i \, v_i^T}{v_i^T \, v_i}$

↳ Ergänze H_i falls nötig auf die Dimensionen von A.

· Multipliziere $H_i \cdot A = \tilde{A}$ (Check : $\tilde{A}$ hat jetzt $\tilde{a}_{ij} = 0$)

· Wiederhole bis $\underbrace{H_n \cdots H_2 \cdot H_1}_{:= Q^T} \cdot A = \underbrace{R}_{:= R}$ $\longleftrightarrow$ $A = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \cdot \ldots \cdot H_n^{-1} \cdot R$

↳ △ Reihenfolge :)

$$= \underbrace{H_1^T \cdot H_2^T \cdot \ldots \cdot H_n^T}_{} \cdot R$$

$$= Q \cdot R$$

Achtung : Ergänze H immer auf Dimensionen von A : $H = \begin{bmatrix} 1 & & \cdots & 0 \\ & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \boxed{H} \end{bmatrix}$ gleiche Dim wie A.

gleiche Dim wie A.

Beispiel 'QR mit Householder'

Bestimme die QR-Zerlegung von $\underline{\underline{A}}$ via Householder-Spiegelungen.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_1 = \underline{a}_1 - \|\underline{a}_1\| \underline{e}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} - \sqrt{6^2 + 8^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow H_1 = I - \frac{2 v_1 v_1^T}{v_1^T v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{80} \begin{bmatrix} 16 & -32 \\ -32 & 64 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}$$

Orthogonale Matrix :)

$$H_1 \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{48}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} = R$$

$$\longrightarrow H_1 A = R \iff \underbrace{H_1^{-1} H_1}_{=I} A = \underbrace{H_1^{-1}}_{=H_1^T} R$$

orthogonal :)

$$\iff A = \underbrace{H_1^T}_{:=Q} R$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} = H_1^T$$

Definition 2.2.0.1. Lineare Kombination

Eine *lineare Kombination* der Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eines lineares Raumes V ist

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n \ \in V \,,$$

mit den Skalaren $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Falls für einen Element $b \in V$ gilt

$$b = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n \ \in V \,,$$

mit geeignet gewählten Skalaren $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dann sagt man: b *lässt sich als lineare Kombination von* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *darstellen*.

BSP: $\vec{V} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3$

EINHEITSVEKTOREN

DIESE 3 VEKTOREN STEHEN ORTHOGONAL ZUEINANDER. WHY?

Definition 2.3.0.2. Lineare Unabhängigkeit

Die Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eines linearen Raumes V sind *linear unabhängig* falls

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = 0 \implies x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Sonst heissen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *linear abhängig*.

BEISPIEL 3.1 : ZEIGEN SIE, DASS $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

LINEAR UNABHÄNGIG SIND.

FAST FORWARD :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I}]{\text{II} + 1\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 2\text{II}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

VOLLER RANG.

$r = 3 = n$

$\implies$ LINEAR UNABHÄNGIGE SPALTEN (VEKTOREN) (DIE MIT DEN PIVOTEN!)

ABER WARUM?

EIGENTLICH SOLLEN WIR ZEIGEN :

$$x_1 \cdot \vec{a} + x_2 \vec{b} + x_3 \vec{c} = 0$$

$$\implies x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$x_1 \cdot 1 - 3x_2 + 0 = 0$

ALSO EINGESETZT :

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

LÖSUNGSVEKTOR ÄNDERT SICH HIER NIE ...

ALSO REICHT ES $r = n = 3$ DAMIT $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ GILT :)