RECAP_W04

ORTHOGONALE MATRIZEN :

- ORTHOGONAL $\iff$ $A^TA = I$ $\longleftrightarrow$ $A^T = A^{-1}$
- ORTHOGONAL $\iff$ ALLE SPALTENVEKTOREN SENKRECHT ZU ALLEN ANDEREN (SKALARPRODUKT = 0)
  UND ALLE SPALTENVEKTOREN HABEN $\|\cdot\|_2 \overset{!}{=} 1$.

QR - ZERLEGUNG : $A = QR$

- VIA GIVENS - ROTATIONSMATRIZEN

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$i = \_\_\_$

$j = \_\_\_$

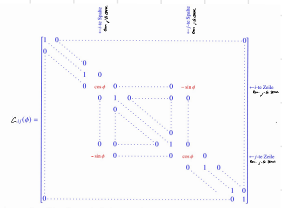
$\downarrow$

$r = \_\_$

$\cos\phi = \_\_$

$\sin\phi = \_\_$

$\downarrow$



$\downarrow$

$$G_i A = \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} & & \tilde{a}_{2n} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} & & \tilde{a}_{3n} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \tilde{a}_{m3} & \tilde{a}_{m4} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix}$$

$$G_k \cdots G_2 G_1 A = R \iff A = G_1^T G_2^T \cdots G_k^T \cdot R$$

$$A = Q \cdot R$$

- VIA HOUSEHOLDER - SPIEGELUNGSMATRIZEN

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \cdots$

$\downarrow$

$$v_i = x_i - \|x_i\|_2 e_1$$

$\downarrow$

$$H_i = I - 2\frac{v_i v_i^T}{v_i^T v_i}$$

$\downarrow$

$$H_1 \cdot A = \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} & & \tilde{a}_{2n} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} & & \tilde{a}_{3n} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \tilde{a}_{m3} & \tilde{a}_{m4} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix}$$

$x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \cdots$

$\circlearrowleft$ *

$$H_k \cdots H_2 H_1 A = R \iff A = H_1^T H_2^T \cdots H_k^T \cdot R$$

$$A = Q \cdot R$$

*AB "RUNDE 2" : $H = \begin{bmatrix} 1 & & \cdots & 0 \\ & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \boxed{H} \end{bmatrix}$

GLEICHE DIM. WIE H_1.

GLEICHE DIM. WIE H_1.

Definition 2.1.0.1. Vektorraum

Ein reeller *Vektorraum / linearer Raum* V ist eine Menge mit zwei Operationen:

Addition von Elementen aus V (+):

$$a, b \in V : a + b \in V,$$

Multiplikation mit Skalaren $(\cdot)$:

$$\alpha \in \mathbb{R}, a \in V : \alpha \cdot a \in V.$$

Zusätzlich müssen folgende Eigenschaften gelten:

1. Kommutativitätsgesetz: $a + b = b + a$ für alle $a, b \in V$.
2. Assoziativitätsgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in V$.
3. Es gibt $0 \in V$, sodass $a + 0 = a$ für alle $a \in V$ (dieses $0 \in V$ heisst Nullvektor).
4. Für jedes $a \in V$ gibt es ein $-a \in V$, so dass $a + (-a) = 0$.
5. Kompatibilität mit der Multiplikation mit Skalaren: $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in V$.
6. Die Addition der Skalare ist distributiv gegen die Multiplikation mit Elementen aus V: $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in V$.
7. Neutralelement für die Multiplikation mit Skalaren: $1 \cdot a = a$ für alle $a \in V$.

„EIN LAND IN DEM VEKTOREN LEBEN."

ZB $\quad P_n$: POLYNOMRAUM MIT GRAD $\leq n-1$

$$P_3 = \text{span}\{1, t, t^2\}$$

$$p_1 = 3 + 5t - 2t^2 \in P_3$$

Definition 2.1.0.9. Unterraum

Sei V ein linearer Raum mit $U \subseteq V$ und $U \neq \emptyset$. Dann heisst U *Unterraum* von V falls gilt, dass:

1. Wenn $x,\ y \in U$ dann auch $x + y \in U$.
2. Wenn $\alpha \in \mathbb{R},\ x \in U$ dann auch $\alpha x \in U$.

BEISPIEL FOLGT...

Bemerkung 2.1.0.10.
Wenn wir $\alpha = 0$ und $x \in U$ Unterraum von V wählen, so muss laut der obigen Definition und der Eigenschaft (3) gelten, dass

$$0 \cdot x = 0 \in U.$$

Ein Unterraum eines linearen Raumes V muss also immer das Element 0 enthalten.

Beispiel Unterraum:

Sei $U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

Ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$?

---

1) Seien $v, w \in U$.
So folgt:

$$v + w = \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2w_1 \\ 2w_1 + w_2 + w_3 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2v_1 + 2w_1 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 + 2w_1 + w_2 + w_3 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(v_1 + w_1) \\ 2(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + (v_3 + w_3) \\ (v_2 + w_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t_1 \\ 2t_1 + t_2 + t_3 \\ t_2 \end{bmatrix} \in U$$

mit $t_1 := v_1 + w_1$
$t_2 := v_2 + w_2$
$t_3 := v_3 + w_3$

2) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in U$.
So gilt:

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha v_1 \\ 2\alpha v_1 + \alpha v_2 + \alpha v_3 \\ \alpha v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r_1 \\ 2r_1 + r_2 + r_3 \\ r_2 \end{bmatrix} \in U$$

mit $r_1 := \alpha v_1$
$r_2 := \alpha v_2$
$r_3 := \alpha v_3$

Aus 1) und 2) folgt: U ist ein gültiger Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

BEISPIEL UNTERRAUM:

SEI $U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

IST U EIN UNTERRAUM VON $\mathbb{R}^3$?

---

2) SEI $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in U$.
SO GILT:

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha v_1 \\ 2\alpha v_1 + \alpha v_2 + \alpha v_3 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r_1 \\ 2r_1 + r_2 + r_3 \\ \alpha \end{bmatrix} \notin U$$

FÜR $\alpha \neq 1$

MIT $r_1 := \alpha v_1$
$r_2 := \alpha v_2$
$r_3 := \alpha v_3$

$\longrightarrow$ SOMIT IST U <u>KEIN</u> GÜLTIGER UNTERRAUM VON $\mathbb{R}^3$.

SOLLTE BEREITS KLAR SEIN... :)
(BSP: SLIDES WOCHE 04 AM SCHLUSS)

Definition 2.2.0.1. Lineare Kombination

Eine *lineare Kombination* der Elemente $v_1, v_2, \dots, v_n$ eines lineares Raumes V ist

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \in V,$$

mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ Skalare.
Falls es für einen Element $b \in V$ gilt

$$b = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \in V,$$

mit geeignet gewählten Skalare $x_1, x_2, \dots, x_n$, dann sagt man: b *lässt sich als lineare Kombination von* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *darstellen.*

DIESES WORT DÜRFTE NEU SEIN...

Definition 2.2.0.2. Span

Wir bezeichnen die Menge aller linear Kombinationen von Elementen $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ mit

$$U = \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \in V, \text{mit } x_1, \dots, x_n \text{ Skalare}\}.$$

Wir sagen, dass U *aufgespannt* oder auch *erzeugt* wird von $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

BSP.

$\rightsquigarrow$ ZUM BEISPIEL SPANNEN $\{1, x\}$ ALLE LINEAREN POLYNOME $\mathcal{P}_2$ AUF

$$\mathcal{P}_2 = \text{SPAN}\{1, x\}$$

$\rightsquigarrow$ ODER $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$ SPANNEN GANZ $\mathbb{R}^3$ AUF.

$$\mathbb{R}^3 = \text{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$$

ZWISCHENFRAGE :

WIR HABEN GESAGT : $\mathbb{R}^3 = \text{SPAN}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$ (DA. BASIS)

· ABER GILT AUCH $\mathbb{R}^3 = \text{SPAN}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$? (DA. BASIS)

· UND WAS IST MIT : $\mathbb{R}^3 = \text{SPAN}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$? (DA. ERZEUGENDENSYSTEM)

· UND WAS IST MIT : $\mathbb{R}^3 = \text{SPAN}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$? (NEIN. DA. ZU KLEIN)
→ NICHT ERZEUGEND

· UND WAS IST MIT : $\mathbb{R}^3 = \text{SPAN}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}, 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5/2 \\ 9/2 \end{pmatrix} \right\}$? (NEIN. NICHT ERZEUGEND)

· UND WAS IST MIT : $\mathbb{R}^3 = \text{SPAN}\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$?

SCHWIERIG ZU SEHEN ...
LET'S TALK ABOUT IT :)

Definition 2.3.0.2. Lineare Unabhängigkeit

Die Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eines linearen Raumes V sind *linear unabhängig* falls

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n = 0 \implies x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

LINEARKOMBINATIONEN VON VEKTOREN $v_1, \ldots, v_n$

Sonst heissen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *linear abhängig*.

BEISPIEL 3.1: ZEIGEN SIE, DASS $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

LINEAR UNABHÄNGIG SIND.

FAST FORWARD:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[III - 2I]{II + 1I} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{III - 2II} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

VOLLER RANG.

$r = 3 = n$

$\Longrightarrow$ LINEAR UNABHÄNGIGE SPALTEN (VEKTOREN) (DIE MIT DEN PIVOTEN!)

ABER WARUM?

EIGENTLICH SOLLEN WIR ZEIGEN:

$$x_1 \cdot \vec{a} + x_2 \vec{b} + x_3 \vec{c} = 0$$

$$\Longrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

ALSO EINGESETZT:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

LÖSUNGSVEKTOR ÄNDERT SICH HIER NIE...

ALSO REICHT ES $r = n = 3$ DAMIT $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ GILT :)

BSP: SIND DIE SPALTENVEKTOREN LIN. UNABHÄNGIG? VON A? B? C?

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$\uparrow n \quad \uparrow k$

NEIN, SEHEN WIR DIREKT! $(n < k)$

$$B = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad (n = k)$$

VIELLEICHT... HIER MÜSSEN WIR GAUSSEN...

$$B \xrightarrow{\text{GAUSSEN}} \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \qquad\qquad B \xrightarrow{\text{GAUSSEN}} \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$*$ LIN. ABHÄNGIGE SPALTEN.

$\text{RANG}(B) = r = 3 \overset{\checkmark}{=} k \overset{\checkmark}{\leq} n = 3$

$\Longrightarrow$ ALLE SPALTEN LIN. UNABHÄNGIG :)

$\text{RANG}(B) = r \neq k$

$\Longrightarrow$ NICHT LIN. UNABHÄNGIGE SPALTEN

$$C = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3} \quad (n > k)$$

VIELLEICHT... HIER MÜSSEN WIR GAUSSEN...

$$C \xrightarrow{\text{GAUSSEN}} \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad C \xrightarrow{\text{GAUSSEN}} \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$*$ LIN. ABHÄNGIGE SPALTEN.

$\text{RANG}(C) = 3 \overset{\checkmark}{=} k \overset{\checkmark}{\leq} n$

$\Longrightarrow$ ALLE SPALTEN LIN. UNABHÄNGIG :)

$\text{RANG}(B) = r \neq k$

$\Longrightarrow$ NICHT LIN. UNABHÄNGIGE SPALTEN

ERZEUGENDENSYSTEM / BASIS / DIMENSION

KANN JEDER VEKTOR b EINES VEKTORRAUMES V ALS LINEARKOMBINATION VON $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ GESCHRIEBEN WERDEN, SO NENNT MAN $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ EIN <u>ERZEUGENDENSYSTEM VON V.</u>

→ EIN ERZEUGENDENSYSTEM ALS LINEAR UNABHÄNGIGEN VEKTOREN HEISST <u>BASIS VON V.</u>

→ DIE <u>DIMENSION n EINES VEKTORRAUMES V</u> $\neq \{0\}$ IST GLEICH DER ANZAHL ELEMENTE IN DER BASIS VON V.

$\boxed{\mathrm{DIM}(V) = n}$ FÜR n BASISVEKTORE

<u>SATZ</u> : BASEN SIND NICHT EINDEUTIG.

→ VERSCHIEDENE BASEN FÜR <u>DENSELBEN</u> VR BESTEHEN ABER IMMER ALS GLEICH VIELEN ELEMENTEN.

Satz 2.3.0.10. Grösse erzeugenden Systemen in einem endlichdimensionalen Raum

Sei V ein linearer Raum mit Dimension n, dann:

1) *sind mehr als n Elemente von V linear abhängig.*
2) *sind weniger als n Elemente von V nicht erzeugend.*
3) *sind n Elemente von V linear unabhängig genau dann wenn sie auch erzeugend sind.*

→ BASIS VON V.

Bsp. ERZEUGENDENSYSTEM, BASIS

⟶ BILDEN DIE DREI VEKTOREN $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

EIN ERZEUGENDENSYSTEM VON $\mathbb{R}^2$?

BILDEN v_1, v_2, v_3 EINE BASIS VON $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{RANG } [v_1, v_2, v_3] = 2$$

DIMENSION VON $\mathbb{R}^2$ IST 2

⟶ MAN DARF NUR 2 BASISVEKTOREN HABEN.

$\Longrightarrow$ v_1, v_2, v_3 BILDEN EIN ERZEUGENDENSYSTEM VON $\mathbb{R}^2$.

$\Longrightarrow$ v_1, v_2, v_3 BILDEN <u>KEINE</u> BASIS VON $\mathbb{R}^2$
(DA MEHR ALS 2 VEKTORE IM $\mathbb{R}^2$ LIN. ABHÄNGIG SIND.)

ZB: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (LIN. ABHÄNGIG)

BEMERKUNG: BASISVEKTORE MÜSSEN LIN. UNABHÄNGIG SEIN!

ZB. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ BESITZT NUR DIE TRIVIALE LÖSUNG $\underline{x} = 0$.

$\Longrightarrow$ LIN. UNABHÄNGIG.

$\{v_1, v_2\}$ WÜRDE ALSO EINE BASIS VON $\mathbb{R}^2$ BILDEN :)

[KLAMMERBEMERKUNG]

LINEARE ABBILDUNG.

3. SEMESTER MEHR DAZU ... :)

FÜR UNS MEISTENS $\mathbb{R}$

Definition [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Seien V und W Vektorräume über einem gemeinsamen ~~Grundkörper~~ $\cancel{K}$. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt lineare Abbildung, wenn für alle $x, y \in V$ und $a \in \cancel{K}$ $\mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen gelten:

- f ist homogen:

  $$f(ax) = af(x)$$

- f ist additiv:

  $$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Die zwei obigen Bedingungen kann man auch zusammenfassen:

$$\boxed{f(ax+y) = af(x) + f(y)}$$

→ DIESE DEFINITION BRAUCHEN WIR SPÄTER ...

Definition 2.2.0.4. Bild

Die Menge aller Bildelemente einer Abbildung heisst *Bild der Abbildung*.
Da die eben definierte Abbildung $\mathscr{A}$ von der Matrix $\mathbf{A}$ eindeutig definiert ist, nennen wir das Bild von $\mathscr{A}$ auch das *Bild der Matrix* $\mathbf{A}$.

$$\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}}$$

⤳ DAS BILD DER MATRIX A GIBT ALSO AN, WELCHE MENGE AN VEKTOREN b ALS LÖSUNG AUFTRETEN KANN ... ('ANALOG' ZU WERTEMENGE BEI FUNKTIONEN :)

Definition 2.2.0.10. Kern einer Matrix

Sei $\mathbf{A}$ eine $m \times n$ Matrix. Wir nennen *Kern der Matrix* $\mathbf{A}$ die Menge der Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, die von $\mathbf{A}$ zu Null abgebildet werden:

$$\text{Kern}\,\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ so dass } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Das entspricht der Menge der Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

⤳ EASIER MIT EINEM BEISPIEL :)

BSP: KERN, BASIS VON KERN, BILD

FINDE KERN, BASIS VON KERN, BILD DER MATRIX $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

KERN (A):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{IV - I} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{III - \frac{3}{2} II} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ZSF :)

RANG(A) = r = 2

FREIE VARIABLE = n - r = 1

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= s \\ x_2 &= -3s \\ x_1 &= 6s - 10s = -4s \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{KERN}(A) = \left\{ s \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$$

BASIS VON KERN (A):

$$\text{BASIS VON KERN (A)} = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

BILD (A) = IMG (A)

⇝ IN DER ZSF HATTEN WIR ZWEI UNABHÄNGIGE SPALTEN (DIE MIT DEN PIVOTEN)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ZSF :)

, URSPRÜNGLICHE MATRIX: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

DAS BILD WIRD JETZT ALS DEN URSPRÜNGLICHEN SPALTEN AUFGESPANNT.

$$\text{BILD (A)} = \text{SPAN} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$