RECAP_W05

- VEKTORRAUM V : · EUKLIDISCHER RAUM IST NICHT DER EINZIGE !

  ↳ Zb. $\mathcal{P}_3 = \text{span}\{1, t, t^2\}$

  $p_2 = 1 + t^2 \in \mathcal{P}_3$

  ↳ UNTERRÄUME U : · ZEIGEN, DASS U EIN UNTERRAUM IST :

  1) SEIEN $v, w \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $v + w =$ ______ $\in U$

  2) $\alpha \cdot v =$ ______ $\in U$

  1) UND 2) $\Longrightarrow$ GEZEIGT UNTERRAUM U.

- LINEARE UNABHÄNGIGKEIT VON VEKTOREN :

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSSEN...}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ SPALTEN MIT PIVOT ELEMENTE SIND LINEAR UNABHÄNGIG

- ERZEUGENDENSYSTEM : Zb.

$$\mathbb{R}^3 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$$

- BASIS : Zb.

$$\mathbb{R}^3 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$$

- DIMENSION :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \text{\# BASISVEKTOREN}$$

BILD (A) : LINEAR UNABHÄNGIGE SPALTEN VON A
(DIE MIT DEN PIVOTELEMENTEN IN DER ZSF)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS...}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{BILD}(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

KERN (A) : $Ax = 0$ LÖSEN UND IN span$\{\ \}$ SCHREIBEN (OFT ABHÄNGIG VON FREIEN VARIABELN)

FUNDAMENTALSATZ DER LINEAREN ALGEBRA

: KEINE PANIK :)

[DIE DIMENSION n EINES VEKTORRAUMES ENTSPRICHT DER ANZAHL ELEMENTE IN SEINER BASIS.]

Satz 2.4.0.7. Fundamentalsatz der linearen Algebra - Teil I

Sei $\mathbf{A}$ *eine* $n \times k$ *Matrix vom Rang* r*. Dann hat die die* $k \times n$ *Matrix* $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ *auch Rang* r *und:*

1) *die Dimensionen der Unteräume sind:*

(1)

$$\dim(\text{Bild}\,\mathbf{A}) = r, \quad \dim(\text{Kern}\,\mathbf{A}) = k - r, \quad \dim(\text{Bild}\,\mathbf{A}^\mathsf{T}) = r, \quad \dim(\text{Kern}\,\mathbf{A}^\mathsf{T}) = n - r,$$

2) *es gilt das Dimensionsatz:*

(2)

$$\dim(\text{Kern}\,\mathbf{A}) + \dim(\text{Bild}\,\mathbf{A}^\mathsf{T}) = k, \quad \dim(\text{Kern}\,\mathbf{A}^\mathsf{T}) + \dim(\text{Bild}\,\mathbf{A}) = n,$$

3) *die Unterräume stehen orthogonal auf einander:*

$$\text{Kern}\,\mathbf{A} \perp \text{Bild}\,\mathbf{A}^\mathsf{T}, \quad \text{Bild}\,\mathbf{A} \perp \text{Kern}\,\mathbf{A}^\mathsf{T}.$$

(3)

Definition 2.4.0.6. Orthogonalität von Unterräumen

Seien U und V Unterräume von $\mathbb{R}^k$. Wir sagen, dass U orthogonal auf V steht, notiert mit $U \perp V$ falls beliebige Vektoren $\mathbf{u}$ aus U und $\mathbf{v}$ aus V orthogonal sind ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$) d.h. mit dem Skalarprodukt in $\mathbb{R}^k$ gilt: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = 0$.

$\longrightarrow$ ANHAND EINES BEISPIELS WIRDS KLARER :)

BEISPIEL VON LETZTER WOCHE ...

FINDE KERN, BASIS VON KERN, BILD DER MATRIX

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} \\ m=4 \end{array} \begin{array}{c} n=3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

KERN (A) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(LETZTE WOCHE...)}]{\text{GAUSSEN}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ZSF :)

RANG(A) = 2

FREIE VARIABLE $= n - r = 1$

$$\Longrightarrow \quad x_3 = s$$
$$x_2 = -3s$$
$$x_1 = 6s - 10s = -4s$$

$$\Longrightarrow \quad \text{KERN}(A) = \left\{ s \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$$

BASIS VON KERN (A) :

$$\text{BASIS VON KERN (A)} = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Longrightarrow$ DIM (KERN (A)) = 1

(1) ||

BILD (A) = IMG (A)

⤳ IN DER ZSF HATTEN WIR ZWEI UNABHÄNGIGE SPALTEN (DIE MIT DEN PIVOTEN)

ZSF :)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad \text{URSPRÜNGLICHE MATRIX :} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

DAS BILD WIRD JETZT ALS DEN URSPRÜNGLICHEN SPALTEN AUFGESPANNT.

$$\text{BILD (A)} = \text{SPAN} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Longrightarrow$ **DIM (BILD (A)) = 2**

BILD (A^T) :

1) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 9 & 10 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$

k IMMERNOCH 3
n IMMERNOCH 4

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 9 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSSEN}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ZSF :)

3) $\rightsquigarrow$ DAS BILD WIRD JETZT AUS DEN URSPRÜNGLICHEN SPALTEN (HIER AUS A^T) AUFGESPANNT.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 9 & 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{BILD}(A^T) = \text{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Longrightarrow \text{DIM}(\text{BILD}(A^T)) = 2$

(2) :

$\text{DIM}(\text{KERN}(A)) = 1$
$\text{DIM}(\text{BILD}(A^T)) = 2$

$\text{DIM}(\text{KERN}(A)) + \text{DIM}(\text{BILD}(A^T)) = 3 = k$ ✓

(3) :

$\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = -4 - 6 + 10 = 0$ ✓

$\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 0 - 6 + 6 = 0$ ✓

(3) GEZEIGT FÜR DIESES BSP. :)

ANALOG : ALL DIESE EIGENSCHAFTEN KÖNNT IHR AM OBIGEN BSP ÜBERPRÜFEN...

Satz 2.4.0.4. Dimension von Kern $\mathbf{A}$

Sei die $n \times k$ Matrix $\mathbf{A}$ von Rang r. Dann:

$$\dim(\mathrm{Kern}\,\mathbf{A}) = k - r\,.$$

Satz 2.4.0.5. Dimension von Kern $\mathbf{A}^\mathsf{T}$

Sei die $n \times k$ Matrix $\mathbf{A}$ von Rang r. Dann hat die $k \times n$ Matrix $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ auch Rang r und:

$$\dim(\mathrm{Kern}\,\mathbf{A}^\mathsf{T}) = n - r\,, \qquad \dim(\mathrm{Bild}\,\mathbf{A}^\mathsf{T}) = r\,.$$

BEWEISE DAZU SIND IM SCRIPT AB p. 90 ...

KOORDINATEN & BASEN

Definition 2.5.0.2. Koordinatenabbildung und Koordinaten

Sei V ein linearer Raum von Dimension n und mit einer Basis $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Die Abbildung $k_{\mathscr{B}}$

$$\begin{aligned} k_{\mathscr{B}} : V &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n &\longmapsto k_{\mathscr{B}} := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

nennen wir Koordinatenabbildung in der Basis $\mathscr{B}$.

Die Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ des bei der Koordinatenabbildung eines Elementes x entstehenden Vektors nennen wir Koordinaten von x in der Basis $\mathscr{B}$.

BEISPIEL : SEI $p := 1 + 3t + 2t^2 \in \mathcal{P}_3$

FRAGE : WAS SIND DIE KOORDINATEN VON p BEZÜGLICH DER BASIS $\mathscr{B} := \{1, t, t^2\}$?

$$p = 1 \cdot 1 + 3 \cdot t + 2 \cdot t^2 \xrightarrow{k_{\mathscr{B}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

FRAGE : WAS SIND DIE KOORDINATEN VON p BEZÜGLICH DER BASIS $\tilde{\mathscr{B}} := \{1+3t, 1+\pi t, t^2\}$?

$$p = 1 \cdot (1+3t) + 0 \cdot (1+\pi t) + 2 \cdot t^2 \xrightarrow{k_{\tilde{\mathscr{B}}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

FRAGE : WAS SIND DIE KOORDINATEN VON p BEZÜGLICH DER BASIS $\mathscr{L} := \{7+3t^2, 1-\frac{5}{2}t + e^2 t^2, 5t - 2t^2\}$?

$$p = ? \cdot (7+3t^2) + ? \cdot (1 - \tfrac{5}{2}t + e^2 t^2) + ? \cdot (5t - 2t^2) \xrightarrow{k_{\mathscr{L}}} \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$\longrightarrow$ NÄCHSTE WOCHE MEHR DAZU (BASISWECHSEL)

Gültige Basis ?

Beispiel von vorhin: Ist $\mathcal{L} := \{7+3t^2,\ 1-\frac{5}{2}t+e^2t^2,\ 5t-2t^2\}$ überhaupt eine gültige Basis von $\mathcal{P}_3$?

Bemerkung vor dem Start:

$$\dim(\mathcal{P}_3) = 3$$
$$\dim(\mathcal{L}) = 3 \quad \text{(Anzahl angeblicher Basisvektoren)}$$

$\longrightarrow$ Wenn diese Anzahl nicht gleich wären, könnte es gar keine gültige Basis von $\mathcal{P}_3$ sein. (wieso nochmals?)

1) Bilde (konsistent) Koordinaten von allen "neuen" Basisvektoren in $\mathcal{L}$ bezüglich der Monomialbasis in $\mathcal{P}_3$.

$$\mathcal{P}_3 \ni 7+3t^2 \xrightarrow{L_\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{P}_3 \ni 1-\frac{5}{2}t+e^2t^2 \xrightarrow{L_\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ e^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{P}_3 \ni 5t-2t^2 \xrightarrow{L_\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

2) Zeige, dass die Koordinatenvektoren alle linear unabhängig sind. (letzte Woche)

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 5 \\ 3 & e^2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss...}} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Homogenes LGS hätte nur die triviale Lösung.

$\Longrightarrow$ Alle Spalten lin. unabhängig.

AUSBLICK FÜR NÄCHSTE WOCHE ...

Definition 3.1.0.1. Lineare Abbildung

Seien X, Y lineare Räume und sei eine Funktion $\mathscr{F} : X \to Y$ gegeben.
Diese Funktion heisst *linear* falls:

1. $\mathscr{F}(x_1 + x_2) = \mathscr{F}(x_1) + \mathscr{F}(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$.
2. $\mathscr{F}(\alpha x) = \alpha \mathscr{F}(x)$ für alle $x \in X$ und α ein Skalar.

Alternative Namen sind: lineare Abbildung, lineare Funktion oder linearer Operator.
Falls $Y = \mathbb{R}/\mathbb{C}$, dann nennt man $\mathscr{F}$ funktional.
Wenn eine Abbildung linear ist, dann werden die Klammern bei der Notation oft weggelassen $\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}x$.