RECAP_W06

- Fundamentalsatz :
  - Berechnen von Kern
  - Berechnen von Bild
  - Berechnen von Dimensionen

  ⇝ verschiedene Beziehungen zwischen Bild / Kern von A / A^T zeigen.

- Koordinaten :

  $\mathcal{P}_3$ mit verschiedenen Basen $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}, \dots$

  $\mathcal{B} := \{1, t, t^2\}$

  $\tilde{\mathcal{B}} := \{1+3t, 1+\pi t, t^2\}$

  $p := 1 + 3t + 2t^2 \in \mathcal{P}_3$

  $\mathcal{P}_3 \ni \quad p = 1 \cdot 1 + 3 \cdot t + 2 \cdot t^2 \xrightarrow{L_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

  $\mathcal{P}_3 \ni \quad p = 1 \cdot (1+3t) + 0 \cdot (1+\pi t) + 2 t^2 \xrightarrow{L_{\tilde{\mathcal{B}}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- Gültige Basis $\mathcal{L} := \{7 + 3t^2, 1 - \frac{5}{2}t + e^2 t^2, 5t - 2t^2\}$?

  - $\dim(\mathcal{L}) \stackrel{!}{=} \dim(\mathcal{B}) \stackrel{!}{=} 3 \stackrel{!}{=} \dim(\mathcal{P}_3)$ (2.3.a.10)
  - Alle konsistenten Koordinaten von $\mathcal{L}$ bilden.

  → Koordinaten auf lineare Unabhängigkeit überprüfen
  (Hat's nur die triviale Lösung!)

Basiswechsel (!)

Prüfungsaufgabe dazu später
evt. nächste Woche :)

Sei $\boxed{p_1 := 1 + 3t + 2t^2 \in \mathcal{P}_3}$

$\mathcal{P}_3$ mit alter Basis $\mathcal{B}$ und neuer Basis $\tilde{\mathcal{B}}$

$\mathcal{B} := \{1, t, t^2\}$

$\tilde{\mathcal{B}} := \{1 + t + t^2, \; 2 + 2t^2, \; t + 2t^2\} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3\}$

$$\mathcal{P}_3 \ni \quad p_1 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot t + 2 \cdot t^2 \xrightarrow{L_{\mathcal{B}}} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{P}_3 \ni \quad p_1 = ? \cdot \tilde{b}_1 + ? \cdot \tilde{b}_2 + ? \cdot \tilde{b}_3 \xrightarrow{L_{\tilde{\mathcal{B}}}} \tilde{x} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Wir wollen die Koordinaten $\underline{x}$ von einer alten Basis $\mathcal{B}$ in Koordinaten $\underline{\tilde{x}}$ einer neuen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ schreiben.

↪ Dieser Basiswechsel wird durch eine Basistransformations / Basiswechsel-Matrix T beschrieben.

$$\boxed{\underline{\tilde{x}} = \underline{\underline{T}} \, \underline{x}}$$

Koordinaten im neuen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$

Basiswechsel-Matrix

Koordinaten im alter Basis $\mathcal{B}$

→ und wie finden wir dieses $\underline{\underline{T}}$?

„Graphische" Erklährung / Kochrezept :)

Wir wollen die Koordinaten von einer alten Basis $\mathcal{B}$

im Koordinaten einer neuen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ schreiben.

Schritt 1: Bestimme Koordinatenvektoren beider Basen bezüglich der alten Basis*. → schreibe als Matrix :)

~~Schritt 2: Zeige dass die Koordinatenvektoren linear unabhängig sind (Gaussen)~~

Hier gehen wir von 2 gültigen Basen aus :)

Schritt 3: Berechne T als

$$\boxed{\begin{aligned} B &= \tilde{B}\, T \\ \tilde{B}^{-1} B &= T \end{aligned}}$$

* oft Monomialbasis / Standardbasis ... :)
→ oft schon gegeben :)

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alt

$\underline{\underline{T}}$

$$\mathcal{P}_3$$

$\underline{\underline{T}}^{-1}$

Rücktransformation :)

neu

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{1 + t + t^2,\ 2 + 2t^2,\ t + 2t^2\}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Bsp: Welche Basistransformations / Basiswechsel - Matrix beschreibt den Basiswechsel vom

$\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ zu $\tilde{\mathcal{B}} := \{1+t+t^2,\ 2+2t^2,\ t+2t^2\} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3\}$ im $\mathcal{P}_3$?

---

1) Bilde Koordinaten (Matrix $\tilde{B}$) von neuer Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich alter Basis $\mathcal{B}$.

$$1+t+t^2 = 1\cdot 1 + 1\cdot t + 1\cdot t^2 \xrightarrow{k_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$2+2t^2 = 2\cdot 1 + 0\cdot t + 2\cdot t^2 \xrightarrow{k_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$t+2t^2 = 0\cdot 1 + 1\cdot t + 2\cdot t^2 \xrightarrow{k_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \tilde{B} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

1) Bilde Koordinaten (Matrix B) von alter Basis $\mathcal{B}$ bezüglich alter Basis $\mathcal{B}$.

$$1 = 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 \xrightarrow{k_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$t = 0\cdot 1 + 1\cdot t + 0\cdot t^2 \xrightarrow{k_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$t^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot t + 1\cdot t^2 \xrightarrow{k_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3) Als Kochrezept:

$$\tilde{B}^{-1} B = T = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Etwas komplexeres Beispiel

Evt. swapped im Class...

→ Welche Basistransformationsmatrix $\underline{T}$ beschreibt die Koordinaten-Transformation von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{N}$?

Alte Basis: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$

Neue Basis: $\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$

---

1) Schon fast gegeben: $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ bzw. $\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

Basiswechselmatrix vom alt zu neuer Basis

3) $$T = M^{-1}B = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{9}{5} & -4 \\ -\frac{6}{5} & \frac{21}{5} & 8 \\ \frac{9}{5} & -\frac{19}{5} & -7 \end{bmatrix}}}$$

→ Tipp zum Berechnen von T:

neu   alt

$$\left[\, \tilde{B} \mid B \,\right]$$

$\Big\downarrow$ Gaußen

Basiswechsel vom alt zu neu

$$\left[\, I \mid \underline{\underline{T}} \,\right]$$

LINEARE ABBILDUNGEN ≠ LINEARE FUNKTIONEN ...

LINEARE ABBILDUNGEN <u>WECHSELN</u> ALSO DEN VEKTORRAUM ... (WIE EINE POST)

Definition 3.1.0.1. Lineare Abbildung

Seien X, Y lineare Räume und sei eine Funktion $\boxed{\mathscr{F} : X \to Y}$ gegeben.
Diese Funktion heisst *linear* falls:

1. $\mathscr{F}(x_1 + x_2) = \mathscr{F}(x_1) + \mathscr{F}(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$.
2. $\mathscr{F}(\alpha x) = \alpha \mathscr{F}(x)$ für alle $x \in X$ und α ein Skalar.

Alternative Namen sind: lineare Abbildung, lineare Funktion oder linearer Operator.
Falls $Y = \mathbb{R}/\mathbb{C}$, dann nennt man $\mathscr{F}$ funktional.
Wenn eine Abbildung linear ist, dann werden die Klammern bei der Notation oft weggelassen $\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}x$.

BSP. ZEIGE DASS $\mathcal{A}$ EINE LINEARE ABBILDUNG IST.

$$\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$$
$$x(t) \longmapsto \frac{d}{dt} x(t)$$

SEIEN $v(t), w(t) \in \mathcal{P}_3$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1) <u>ADDITIVITÄT</u>:

$$\mathcal{A}(v+w)(t) = \mathcal{A}(v(t) + w(t)) = \frac{d}{dt}\left[v(t) + w(t)\right]$$
$$= \frac{d}{dt}\left[(a + bt + ct^2) + (d + et + ft^2)\right]$$
$$= b + e + 2(c+f)t$$
$$= \frac{d}{dt}\left[(a + bt + ct^2)\right] + \frac{d}{dt}\left[(d + et + ft^2)\right]$$
$$= \frac{d}{dt}\left[v(t)\right] + \frac{d}{dt}\left[w(t)\right] = \mathcal{A}(v(t)) + \mathcal{A}(w(t)) \quad ✓$$

2) HOMOGENITÄT:

$$\mathcal{A}(\alpha v)(t) = \mathcal{A}(\alpha \cdot v(t)) = \frac{d}{dt}\left[\alpha v(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[\alpha(a + bt + ct^2)\right] = \alpha b + 2\alpha c t = \alpha \frac{d}{dt}\left[v(t)\right]$$
$$= \alpha \cdot \mathcal{A}(v(t)) \quad ✓$$

AUS 1) UND 2) FOLGT, DASS DIE ABBILDUNG LINEAR IST. :)

LINEARE ABBILDUNGEN BEISPIEL **ABBILDUNGSMATRIZEN** BEZÜGLICH EINER BASIS.

· SEI $\mathcal{A}$ DIE LINEARE ABBILDUNG VON VORHIN:

$$\mathcal{A} : P_3 \longrightarrow P_2$$
$$x(t) \longmapsto \frac{d}{dt} x(t)$$

SEI $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$ EINE BASIS FÜR P_3 (URBILDRAUM)

SEI $\mathcal{B}_2 = \{1, t\}$ EINE BASIS FÜR P_3 (BILDRAUM)

$\rightsquigarrow$ WIR SUCHEN DIE ABBILDUNGSMATRIX A, WELCHE DIE LINEARE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ BEZÜGLICH DER BASEN $\mathcal{B}_1$ UND $\mathcal{B}_2$ DARSTELLT

1) ABBILDUNG ALLER BASISVEKTOREN AUS $\mathcal{B}_1$ BILDEN

2) ABBILDUNGEN ALS LINEARKOMBINATION VON BASISVEKTOREN AUS $\mathcal{B}_2$ BILDEN.

$\longrightarrow$ KONSISTENTE KOORDINATENMATRIX BILDEN

1) 2)

$$\mathcal{A}(b_1) = \mathcal{A}(1) = \frac{d}{dt}[1] = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t \xrightarrow{L_{\mathcal{B}_2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(b_2) = \mathcal{A}(t) = \frac{d}{dt}[t] = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t \xrightarrow{L_{\mathcal{B}_2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(b_3) = \mathcal{A}(1) = \frac{d}{dt}[t^2] = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t \xrightarrow{L_{\mathcal{B}_2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

i)

$$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ABER WOZU ? UND HOW CAN WE BE SURE ?

SEI $\boxed{p_1 := 1 + 3t + 2t^2 \in \mathcal{P}_3}$ EIN VEKTOR IM URBILDRAUM

ZIEL : $\mathcal{A}(p_1)$ BERECHNEN :

VARIANTE 1 : $\mathcal{A}(p_1) = \frac{d}{dt}\left[1 + 3t + 2t^2\right] = \underline{\underline{3 + 4t}} \in \mathcal{P}_2$
(MENSCH)

VARIANTE 2 : KOORDINATEN BILDEN : $p_1 \xrightarrow{\ell_{B_1}} x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
(MASCHINES)

ABBILDUNGSMATRIX : $\boxed{Ax} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = x_2$
MULTIPLIKATION VON LINKS MIT KOORDINATENVEKTOR

"INVERSE KOORDINATEN" : $x_2 \xrightarrow{\ell_{B_2}^{-1}} \underline{\underline{3 + 4t}} \in \mathcal{P}_2$
→ VEKTOR BILDEN

↝ ABER WIE WERDE DIE ABBILDUNGSMATRIX B DER LINEAREN ABBILDUNG $\mathcal{A}$ BEZÜGLICH DEN BASEN

$\tilde{B}_1 := \{1 + t + t^2,\ 2 + 2t^2,\ t + 2t^2\}$
$\tilde{B}_2 = \{1,\ 1 - t\}$

AUS ?

NICHT ERSCHRECKEN : **KOMMUTATIVE DIAGRAMME**

LIN. ABB.

$$\sqrt{3} \xrightarrow{\quad A \quad} \sqrt{2}$$

BASEL

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
P_3 \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift right, "L_{B_1}"'] & & P_2 \arrow[d, shift right, "L_{B_2}"'] \\
B_1 = \{1, t, t^2\} \arrow[u, shift right, "L_{B_1}^{-1}"'] & & B_2 = \{1, t\} \arrow[u, shift right, "L_{B_2}^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ABB. MATRIX

$$
\begin{tikzcd}
P_3 \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift right, "L_{B_1}"'] & & P_2 \arrow[d, shift right, "L_{B_2}"'] \\
B_1 = \{1, t, t^2\} \arrow[u, shift right, "L_{B_1}^{-1}"'] \arrow[rr, bend right] & & B_2 = \{1, t\} \arrow[u, shift right, "L_{B_2}^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Basen-Wechsel

$\tilde{\mathcal{B}}_1 := \{ 1 + t + t^2 ,\ 2 + 2t^2 ,\ t + 2t^2 \}$

$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\tilde{B}_1 \arrow[d, shift left, "L_{\tilde{B}_1}^{-1}"] \arrow[dd, bend right=60, "T"'] & \\
P_3 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{B}_1}"] \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "L_{B_1}"'] & P_2 \arrow[d, shift right, "L_{B_2}"'] \\
B_1 \arrow[u, shift right, "L_{B_1}^{-1}"'] \arrow[uu, bend left=40, "T^{-1}"] \arrow[r, bend right, "A"'] & B_2 \arrow[u, shift right, "L_{B_2}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$T = \tilde{B}^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\mathcal{B}_1 = \{ 1, t, t^2 \}$

$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathcal{B}_2 = \{ 1, t \}$

$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

BASEN-WECHSEL

$\tilde{\mathcal{B}}_1 := \{1+t+t^2,\ 2+2t^2,\ t+2t^2\}$

$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\tilde{\mathcal{B}}_2 = \{1,\ 1-t\}$

$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{B}}_1 \arrow[dd, bend right=60, "T"'] \arrow[d, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_1}^{-1}"] & & \tilde{\mathcal{B}}_2 \arrow[d, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_2}^{-1}"] \\
\mathcal{P}_3 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_1}"] \arrow[d, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}"'] \arrow[rr, "\mathcal{A}"] & & \mathcal{P}_2 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_2}"] \arrow[d, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}"'] \\
\mathcal{B}_1 \arrow[u, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}^{-1}"'] \arrow[uu, bend left=40, "T^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "A"'] & & \mathcal{B}_2 \arrow[u, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}^{-1}"'] \arrow[uu, bend right=60, "S"']
\end{tikzcd}
$$

$T = B_1^{-1} \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$S = \tilde{B}_2^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

S^{-1}

$\mathcal{B}_1 = \{1,\ t,\ t^2\}$

$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathcal{B}_2 = \{1,\ t\}$

$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

KOMMUTATIVITÄT oder so :)

$$B \cdot x = W \cdot A \cdot T \cdot x$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 := \{1 + t + t^2,\ 2 + 2t^2,\ t + 2t^2\}$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_2 = \{1,\ 1 - t\}$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{B}}_1 \arrow[d, shift left, "L_{\tilde{B}_1}^{-1}"] \arrow[dd, bend right=60, "T"'] & & \tilde{\mathcal{B}}_2 \arrow[d, shift left, "L_{\tilde{B}_2}^{-1}"] \\
P_3 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{B}_1}"] \arrow[d, "L_{B_1}"'] \arrow[rr, "A"] & & P_2 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{B}_2}"] \arrow[d, "L_{B_2}"'] \\
\mathcal{B}_1 \arrow[u, shift right, "L_{B_1}^{-1}"'] & & \mathcal{B}_2 \arrow[u, shift right, "L_{B_2}^{-1}"'] \arrow[uu, bend right=60, "W"']
\end{tikzcd}$$

$$T = B_1^{-1} \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W = \tilde{B}_2^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_1 = \{1,\ t,\ t^2\}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{1,\ t\}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Bsp.

$$B = W \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5/2\\-3/4\\1/2\end{bmatrix}$$

$\tilde{B}_1 := \{1 + t + t^2,\ 2 + 2t^2,\ t + 2t^2\}$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\tilde{B}_2 = \{1, 1 - t\}$

$$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot \begin{bmatrix}5/2\\-3/4\\1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-4\end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{B}_1 \arrow[rr, bend left, "B"] \arrow[dd, bend right=60, "T"'] \arrow[d, shift left, "L_{\tilde{B}_1}^{-1}"] & & \tilde{B}_2 \arrow[d, shift left, "L_{\tilde{B}_2}^{-1}"] \\
P_3 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{B}_1}"] \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift right, "L_{B_1}"'] & & P_2 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{B}_2}"] \arrow[d, shift right, "L_{B_2}"'] \\
B_1 \arrow[u, shift right, "L_{B_1}^{-1}"'] \arrow[rr, bend right, "A"'] & & B_2 \arrow[u, shift right, "L_{B_2}^{-1}"'] \arrow[uu, bend right=60, "W"']
\end{tikzcd}$$

$$T = \tilde{B}_1^{-1} B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W = \tilde{B}_2^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$1 + 3t + 2t^2$

$$\frac{d}{dt} p_1 = 3 + 4t = L_{B_2}^{-1}\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right) = L_{\tilde{B}_2}^{-1}\left(\begin{bmatrix}7\\-4\end{bmatrix}\right)$$

$B_1 = \{1, t, t^2\}$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

$B_2 = \{1, t\}$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

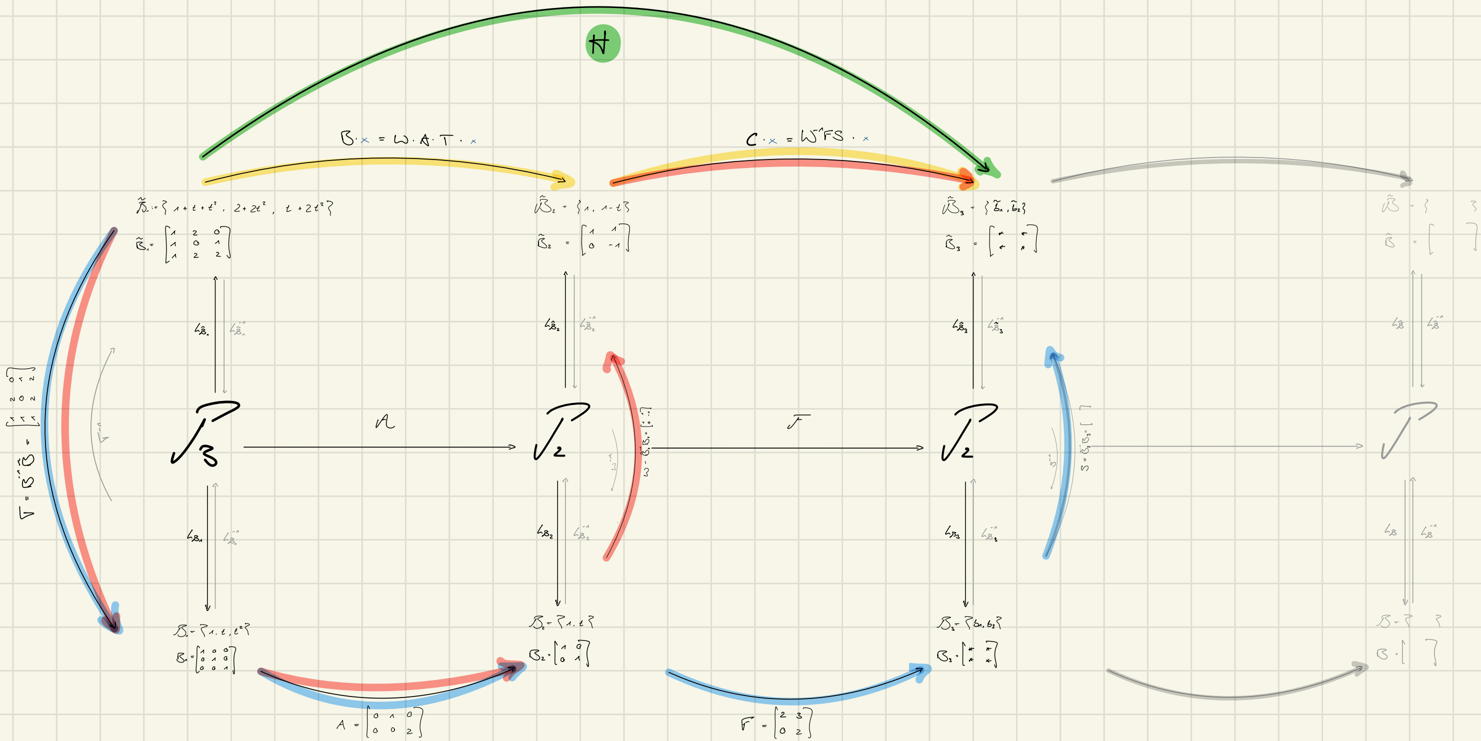
$$A \cdot \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

VERKNÜPFTE LIN. ABBILDUNGEN

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} \circ \mathcal{A} = \mathcal{F}(\mathcal{A}(x(t))) : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$$

$$H = C \cdot B = S \cdot F \cdot A \cdot T = C \cdot W \cdot A \cdot T$$



AUTO / ISOMORPHISMEN

Definition 3.2.0.4. Isomorphismen und Automorphismen

Eine bijektive lineare Abbildung $\mathcal{F} : X \longrightarrow Y$ heiss *Isomorphismus*.
In diesem Fall sagt man, dass die linearen Räume X, Y *isomorph* zueinander sind. Falls $X = Y$, dann heisst $\mathcal{F}$ *Automorphismus*.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, shift left, "F"] \arrow[d, shift right, "L_{B_1}"'] & & V \arrow[ll, shift left, "F^{-1}"] \arrow[d, shift right, "L_{B_2}"'] \\
B_1 \arrow[u, shift right, "L_{B_1}^{-1}"'] \arrow[rr, bend right, ""'] & & B_2 \arrow[u, shift right, "L_{B_2}^{-1}"'] \arrow[ll, bend right, "F^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$B_1 = \{1, t, t^2\}$

$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

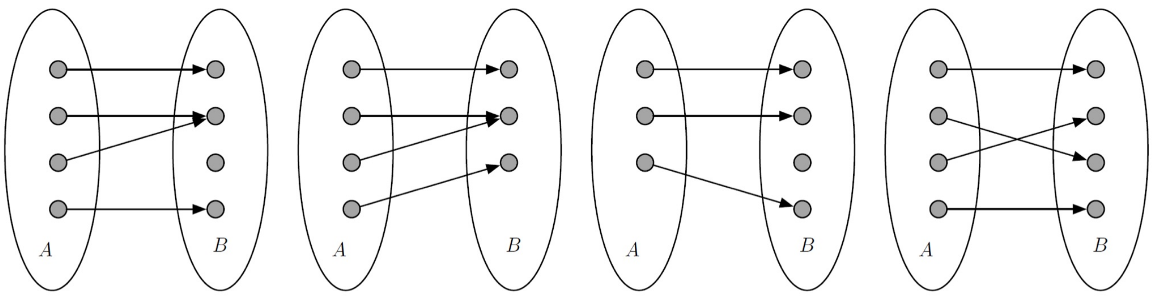
$B_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$

$B_2 = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$

$\boxed{F = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}}$

F INVERTIERBAR
BEI ISOMORPHEM
ABBILDUNGEN

RECAP :



weder injektiv, noch surjektiv — surjektiv, aber nicht injektiv — injektiv, aber nicht surjektiv — bijektiv

DER VOLLSTÄNDIGKEIT :

Kernel und Bild

Definition 3.2.0.7. Kernel und Bild

Sei $\mathscr{F}$ eine Abbildung, dann können folgende zwei Mengen definiert werden:

Kernel von $\mathscr{F}$:
$\mathrm{Kern}(\mathscr{F}) = \{x \in X,\ \mathscr{F}x = 0\}$.
Wenn $\mathscr{F}$ eine lineare Abbildung ist, dann ist $\mathrm{Kern}(\mathscr{F})$ ein linearer Unterraum von X.

Bild von $\mathscr{F}$:
$\mathrm{Bild}(\mathscr{F}) = \{y \in Y$, so dass $x \in X$ mit $\mathscr{F}x = y\}$.
Wenn $\mathscr{F}$ eine lineare Abbildung ist, dann ist $\mathrm{Bild}(\mathscr{F})$ ein linearer Unterraum von Y.

NICHTS NEUES :)

Satz 3.2.0.8. Kern einer linearen Injektion

Wenn $\mathscr{F} : X \to Y$ eine lineare Abbildung ist, dann gilt:
$\mathscr{F}$ ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(\mathscr{F}) = \{0\}$.

Satz 3.2.0.9. Dimensionssatz

Wenn $\mathscr{F} : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen den beiden endlichdimensionalen Räumen X und Y ist, dann gilt:

$$\dim(\mathrm{Kern}(\mathscr{F})) + \dim(\mathrm{Bild}(\mathscr{F})) = \dim(X)\,.$$

Definition 3.2.0.10. Rang einer linearen Abbildung

Der Rang einer linearen Abbildung $\mathscr{F}$ zwischen zwei endlichdimensionalen Räumen ist

$$\mathrm{Rang}(\mathscr{F}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{F}) = \dim(\mathrm{Bild}(\mathbf{F}))\,.$$

GANZ NATÜRLICH