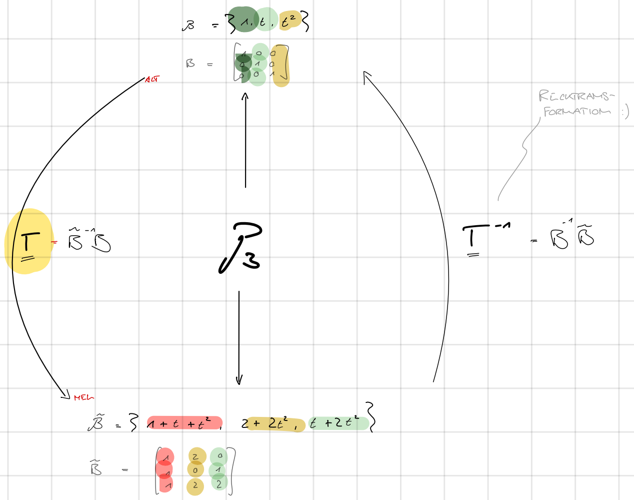
RECAP_W07

· **BASISWECHSEL** (- MATRIX T) :

1 KOORDINATENMATRIZEN B, $\tilde{B}$ BILDEN
(KONSISTENT, BZGL. ALTE/NEUE BASIS)

2 $T := \tilde{B}^{-1} B$ (VON B ZU $\tilde{B}$)
$T^{-1} := B^{-1} \tilde{B}$ (VON $\tilde{B}$ ZU B)



$\hat{x} = T x$: KOORDINATEN BZGL. BASIS $\mathcal{B}$ WERDEN GEWECHSELT IN KOORDINATEN BZGL. BASIS $\tilde{\mathcal{B}}$

→ VEKTOREN WECHSELN NICHT BEI BASISTRANSFORMATION.
→ VEKTORRAUM WECHSELT NICHT BEI BASISTRANSFORMATION.

· **LIN. ABBILDUNGEN** :

$v(t), w(t) \in \mathcal{P}_3$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1) <u>ADDITIVITÄT</u> : $A(v+w)(t) = A(v(t)) + A(w(t))$ ✓

2) HOMOGENITÄT : $A(\alpha v)(t) = \alpha \cdot A(v(t))$ ✓

AUS 1) UND 2) FOLGT, DASS DIE ABBILDUNG LINEAR IST. :)

RECAP_W07

· ABBILDUNGSMATRIZEN :

(VON LINEAREN ABBILDUNGEN)

A = IMMER (KOCHREZEPT)

$\mathcal{A}$ = AUFGABEN SPEZIFISCH

$\mathcal{A} : P_3 \longrightarrow P_2$

$x(t) \longmapsto \frac{d}{dt} x(t)$

SEI $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$ EINE BASIS FÜR P_3 (URBILDRAUM)

SEI $\mathcal{B}_2 = \{1, t\}$ EINE BASIS FÜR P_2 (BILDRAUM)

⤳ WIR SUCHEN DIE ABBILDUNGSMATRIX A, WELCHE DIE LINEARE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ BEZÜGLICH DER BASEN $\mathcal{B}_1$ UND $\mathcal{B}_2$ DARSTELLT

1) ABBILDUNG ALLER BASISVEKTORE AUS $\mathcal{B}_1$ BILDEN

2) ABBILDUNGEN ALS LINEARKOMBINATION VON BASISVEKTORE AUS $\mathcal{B}_2$ BILDEN.

⟶ KONSISTENTE KOORDINATENMATRIX BILDEN

$$\mathcal{A}(b_1) = \mathcal{A}(1) = \frac{d}{dt}[1] = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t \xrightarrow{L_{\mathcal{B}_1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(b_2) = \mathcal{A}(t) = \frac{d}{dt}[t] = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t \xrightarrow{L_{\mathcal{B}_1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(b_3) = \mathcal{A}(t^2) = \frac{d}{dt}[t^2] = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t \xrightarrow{L_{\mathcal{B}_1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ANALOG FÜR ALLE BASISVEKTORE IN $\mathcal{B}_1$.

$$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

⟶ KOMMUTATIVE DIAGRAMME :

$$\begin{tikzcd}
P_3 \arrow[rr, "\mathcal{A}"] \arrow[d, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}"'] & & P_2 \arrow[d, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}"'] \\
\begin{matrix} \mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\} \\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \arrow[u, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}^{-1}"'] \arrow[rr, bend right, "A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}"'] & & \begin{matrix} \mathcal{B}_2 = \{1, t\} \\ B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \arrow[u, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

ABBILDUNGSMATRIZEN BZGL. ANDERER BASEN.

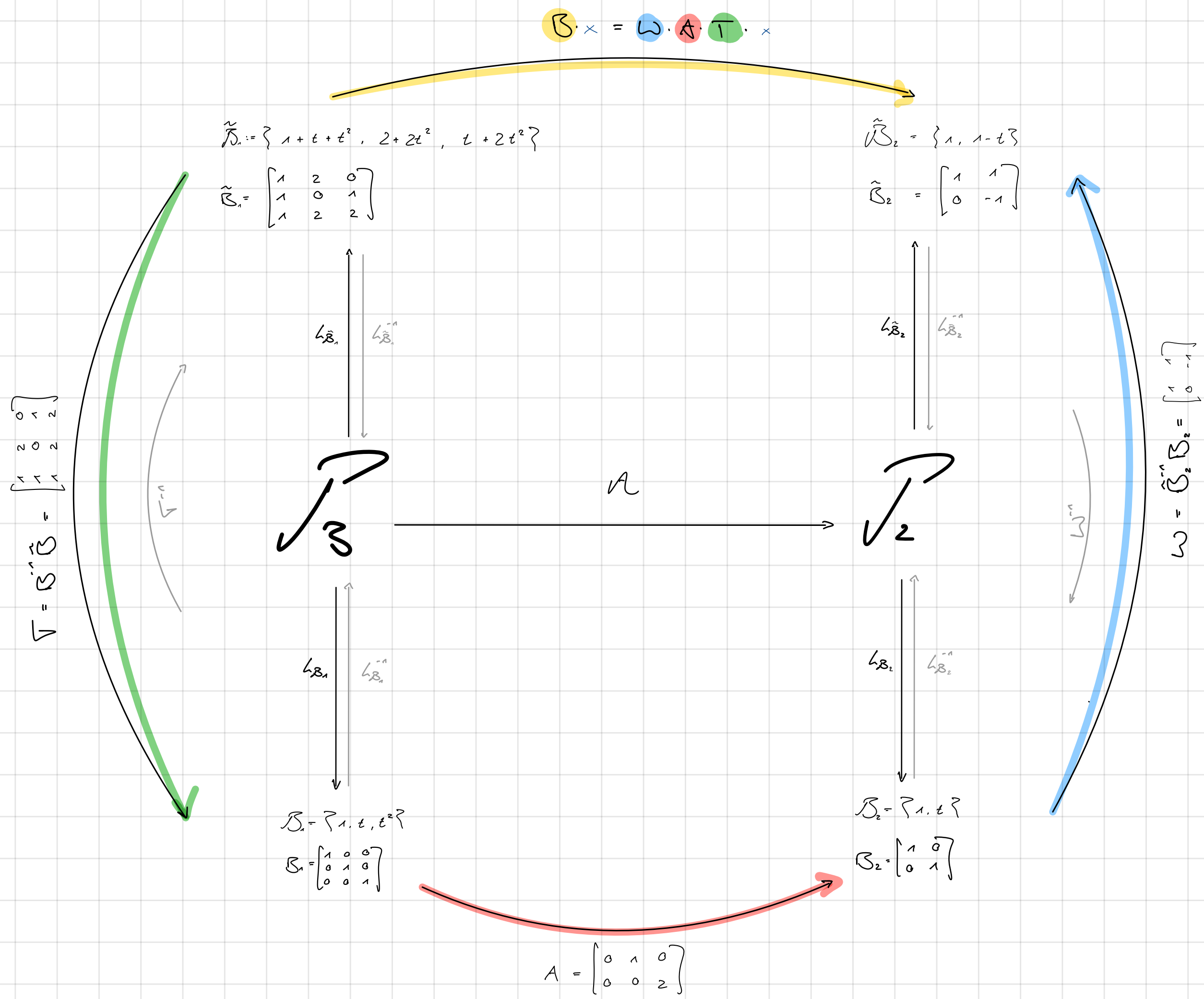
- DIE ABBILDUNGSMATRIX A SIEHT BEZÜGLICH VERSCHIEDENER BASEN VERSCHIEDEN AUS OBWOHL DIE ABBILDUNGSMATRIX DIESELBE LINEARE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ DARSTELLT.

→ ABBILDUNGSMATRIX HÄNGT VON DEN BASEN IN BILD- UND URBILDRAUM AB.

$$B = W \cdot A \cdot T$$

! ABBILDUNGSMATRIZEN BEZÜGLICH VERSCHIEDENER BASEN KÖNNEN VIA. KOMMUTATIVEM DIAGRAMM BESTIMMT WERDEN.

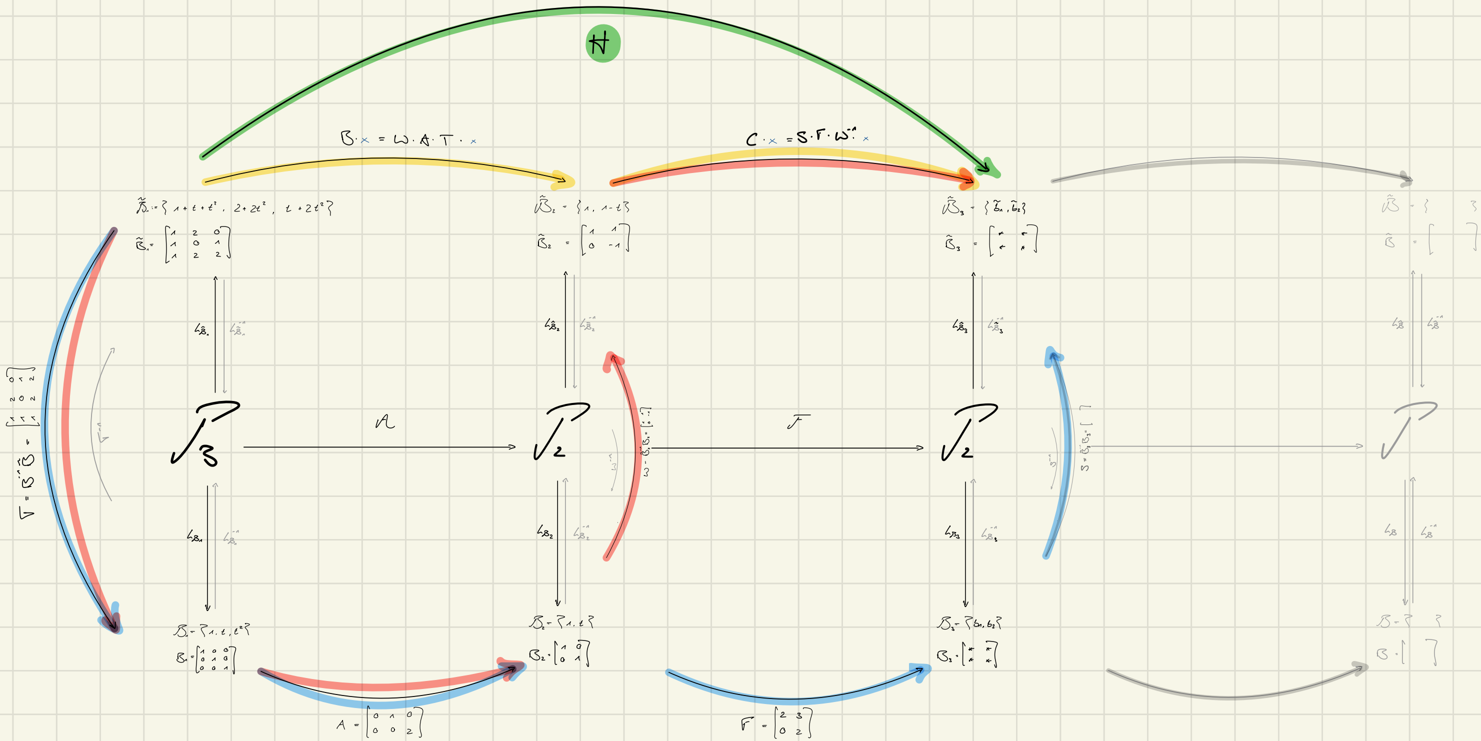
→ ODER DURCH ABBILDEN DER "NEUEN" BASISVEKTORE IN $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2$, ANALOG ZU LETZTER WOCHE.



VERKNÜPFTE LIN. ABBILDUNGEN

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} \circ \mathcal{A} = \mathcal{F}(\mathcal{A}(x(t))) \quad : \quad \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$$

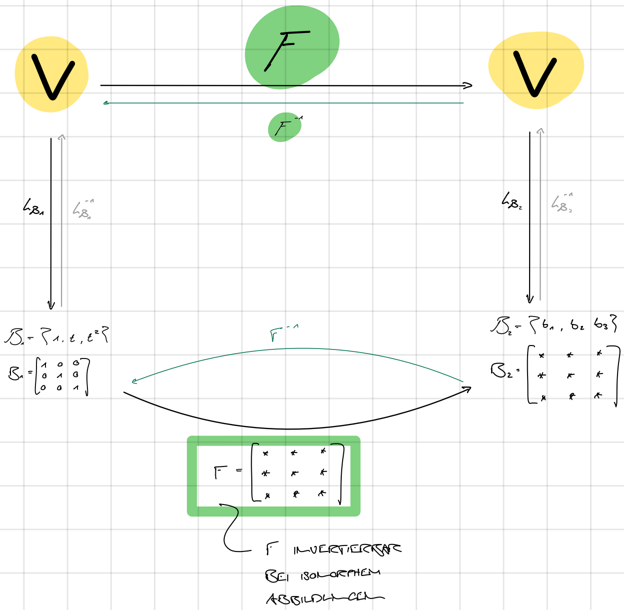
$$H = C \cdot B = S \cdot F \cdot A \cdot T = C \cdot W \cdot A \cdot T$$



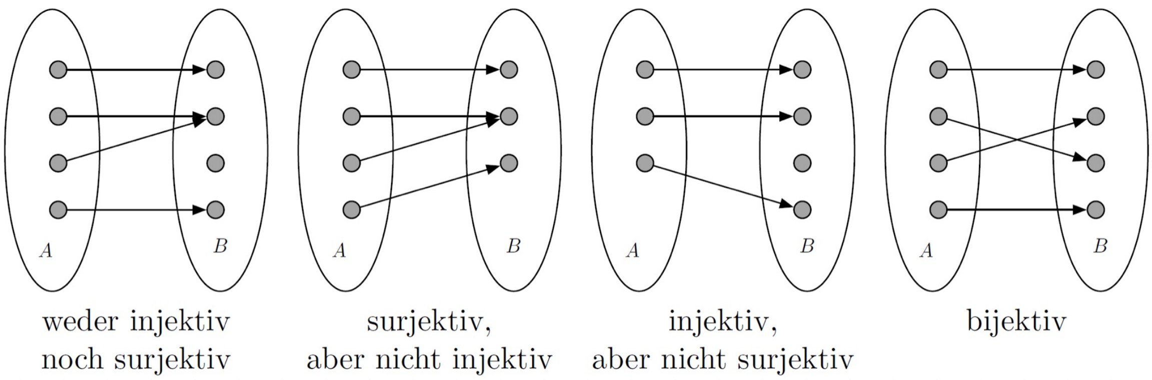
AUTO / ISOMORPHISMEN

Definition 3.2.0.4. Isomorphismen und Automorphismen

Eine bijektive lineare Abbildung $\mathcal{F} : X \longrightarrow Y$ heiss *Isomorphismus*.
In diesem Fall sagt man, dass die linearen Räume X, Y *isomorph* zueinander sind. Falls $X = Y$, dann heisst $\mathcal{F}$ *Automorphismus*.



RECAP:



DER VOLLSTÄNDIGKEIT :

Kernel und Bild

Definition 3.2.0.7. Kernel und Bild

Sei $\mathscr{F}$ eine Abbildung, dann können folgende zwei Mengen definiert werden:

Kernel von $\mathscr{F}$:
$\text{Kern}(\mathscr{F}) = \{x \in X, \ \mathscr{F}x = 0\}$.
Wenn $\mathscr{F}$ eine lineare Abbildung ist, dann ist $\text{Kern}(\mathscr{F})$ ein linearer Unterraum von X.

Bild von $\mathscr{F}$:
$\text{Bild}(\mathscr{F}) = \{y \in Y$, so dass $x \in X$ mit $\mathscr{F}x = y\}$.
Wenn $\mathscr{F}$ eine lineare Abbildung ist, dann ist $\text{Bild}(\mathscr{F})$ ein linearer Unterraum von Y.

NICHTS NEUES :)

Satz 3.2.0.8. Kern einer linearen Injektion

Wenn $\mathscr{F} : X \to Y$ eine lineare Abbildung ist, dann gilt:
$\mathscr{F}$ ist injektiv genau dann, wenn $\text{Kern}(\mathscr{F}) = \{0\}$.

Satz 3.2.0.9. Dimensionssatz

Wenn $\mathscr{F} : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen den beiden endlichdimensionalen Räumen X und Y ist, dann gilt:

$$\dim(\text{Kern}(\mathscr{F})) + \dim(\text{Bild}(\mathscr{F})) = \dim(X) .$$

Definition 3.2.0.10. Rang einer linearen Abbildung

Der Rang einer linearen Abbildung $\mathscr{F}$ zwischen zwei endlichdimensionalen Räumen ist

$$\text{Rang}(\mathscr{F}) = \text{Rang}(\mathbf{F}) = \dim(\text{Bild}(\mathbf{F})) .$$

GANZ NATÜRLICH

NORMEN

Definition 4.1.0.1. Norm

Sei V ein linearer Raum.
Die Funktion $\|\cdot\| : V \longrightarrow [0, \infty[$ heisst Norm in V, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

(N1) Aus $\|v\| = 0$ folgt $v = 0$.

(N2) Sei α ein Skalar und $v \in V$ beliebig. Dann gilt: $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

(N3) Für beliebige $v, w \in V$ gilt: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung).

Definition 4.1.0.2. Normierter linearer Raum

Ein linearer Raum V, welcher eine Norm $\|\cdot\|$ besitzt, heisst normierter linearer Raum.

→ FRAGE: DIE EUKLIDISCHE NORM $\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots}$ IST NICHT "DIE EINZIGE".

BSP. : p-NORM IN $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_p := \left[|x_1|^p + \dots + |x_n|^p\right]^{1/p}$

∞-NORM IN $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$

⋮

IN NORMIERTEN RÄUMEN V ($v, w \in V$)

$$\boxed{\longrightarrow \quad \langle v, w \rangle \leq \underbrace{\|v\|}_{\sqrt{\langle v, v \rangle}} \cdot \|w\|}$$

MATRIXNORMEN:

Die Zeilensummen-Norm $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|\mathbf{A}x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Für eine Matrix $\mathbf{A}$ würden wir dies folgendermassen berechnen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \implies \|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{|1| + |-2| + |-3|, \; |2| + |3| + |-1|\} = 6.$$

Die Spektral-Norm $\|\cdot\|_2$:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|\mathbf{A}x\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})},$$

wobei $\lambda_{\max}$ der grösste Eigenwert von $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ ist. Was ein Eigenwert ist und wie wir diesen berechnen können, werden wir im Kapitel 7.2 sehen. ⌟

WERDEN WIR SPÄTER IM SEMESTER WIEDER TREFFEN :)

SKALARPRODUKTE

Definition 4.2.0.1. Skalarprodukt

Sei V ein linearer Raum.
Ein *Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine Funktion von zwei Variablen in diesem Raum V

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

welche die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

(S1) Die Funktion ist *linear im zweiten Argument*:

$$\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle$$

für alle $x, \ y, \ z \in V$ und $a, \ b$ Skalare;

(S2) Die Funktion ist *symmetrisch*:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \text{ über } \mathbb{R}$$
$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ über } \mathbb{C}\,;$$

(S3) Die Funktion ist *positiv definit*:

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ für alle } x \in V$$
$$\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0\,;$$

falls nur der erste dieser beiden letzten Punkte erfüllt ist,
so sprechen wir von *positiv semi-definit*.

Definition 4.2.0.4. Norm aus einem Skalarprodukt

Man sagt, dass *eine Norm* $\|\cdot\|$ *aus einem Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *kommt*, falls

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

für alle Elemente x eines linearen Raumes X.

INDUZIERTE NORM.

ZB. EUKLIDISCHE NORM: $x \in \mathbb{R}^d$

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

... KURZ WIRKLICH ETWAS THEORIE :/

Definition 4.2.0.9. Orthogonale Projektion auf einem Vektor

Sei V ein linearer Raum mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. So ist die orthogonale Projektion $P_y x$ von $x \in V$ auf $y \in V$, für $y \neq 0$, definiert als

$$P_y x = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} y\,.$$

ZB: DIE ORTHOGONALE PROJEKTION VON $x = \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ AUF $y = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ IST:

$$P_y x := \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} y = \frac{1\cdot 1 + 0 + 0}{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Definition 4.2.0.12. Winkel in einem linearen Raum

Der Winkel $\widehat{\cdot,\cdot}$ zwischen zwei Elementen x und y eines linearen Raumes V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist definiert als

$$\sphericalangle(x,y) = \widehat{x, y} = \arccos\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|}\,.$$

ZB: DER WINKEL ZWISCHEN $x = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ UND $y = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ IST:

$$\arccos\left[\frac{|1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0}}\right] \approx 55.5°$$

$$\boxed{\text{ORTHOGONALE VEKTOREN} \Longleftrightarrow \text{SKALARPRODUKT} = 0}$$

Satz 4.2.0.11. Schwarz'sche Ungleichung

Sei V ein linearer Raum mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ einem Skalarprodukt, dann gilt folgende Ungleichung für alle Elemente $x, y \in V$:

$$\boxed{|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}\,.}$$

Dies kann alternativ auch mit der aus dem Skalarprodukt kommende Norm $\|\cdot\|$ geschrieben werden:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|\,.$$

Satz 4.2.0.13. Pythagoras

Sei V ein linearer Raum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und einer aus diesem Skalarprodukt kommende Norm $\|\cdot\|$.
Für zwei Elemente x und y, welche orthogonal aufeinander stehen ($x \perp y$, d.h. $\langle x, y\rangle$), gilt

$$\|x + y\|^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\,.$$

NICE TO HAVE
(I GUESS ...)

$\|\cdot\|_2 \overset{!}{=} 1$

Satz 4.2.0.15. Orthogonale Vektoren sind linear unabhängig

Seien $e_1, e_2, \dots, e_n$ *Einheitsvektoren in einem linearen Raum* V *mit einer Norm* $\|\cdot\|$*, die aus dem Skalarprodukt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *kommt.*
Falls die Einheitsvektoren $e_1, e_2, \dots, e_n$ *paarweise orthogonal sind, so sind sie auch linear unabhängig.*

ORTHOGONALITÄT $\Longrightarrow$ LIN. UNABHÄNGIGKEIT

$\cancel{\Longleftarrow}$

ZB: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ UND $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ SIND LIN. UNABHÄNGIG, ABER NICHT ORTHOGONAL.

→ WIE WÜRDE MAN DAS ZEIGEN? :)

ALSO LAUT SATZ 4.2.0.15 AUCH LIN. UNABHÄNGIG

Satz 4.2.0.16. Orthonormale Basis

n *paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem linearen Raum der Dimension* n *bilden eine orthonormale Basis in diesem Raum.*

→ BEI ORTHOGONALEN BASEN MÜSSEN DIE BASISVEKTORE ORTHOGONAL SEIN, ABER NICHT NORM $\|e_i\| = 1$ HABEN.

→ DOCH WIE KANN MAN EINE ORTHONORMALE BASIS BILDEN?

→ NÄCHSTE WOCHE :)

BENUTZEN WIR UNSERE ERHALTENE ONB :) (!)

Satz 4.2.0.20. Parseval

Das Skalarprodukt in V lässt sich über das euklidischen Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ berechnen:

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \mathbf{x}^H\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\,.}$$

NOTATION... NAJA :)

SEI ONB $= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x, \sqrt{\frac{10}{4}}\,(3x^2-1) \right\}$ EINE ONB VON $\mathcal{P}_3$.

SEI DAS SKALARPRODUKT $\langle g, h\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)\,h(x)\,dx$ MIT $g(x), h(x) \in \mathcal{P}_3$

BESTIMME $\left\langle \frac{2}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{12}{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$.

VARIANTE 1: DIREKT IN SKALARPRODUKT (DEFINITION) EINSETZEN.

$$\left\langle \frac{2}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{12}{2}}\cdot x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{12}{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dx = \text{LANGE RECHNUNG} \;...\; = \underline{\underline{2}}$$

VARIANTE 2: SATZ VON PARSEVAL:

$$\left\langle \frac{2}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{12}{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \;\hat{=}\; \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \underline{\underline{2}}$$

$\mathcal{L}_{ONB}$

KOORDINATEN BEZÜGLICH ONB