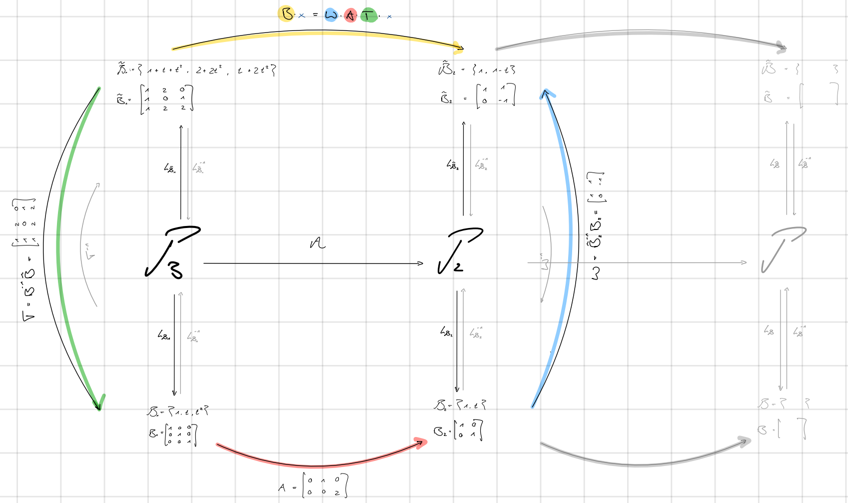
# Recap_W08

- Kommutative Diagramme
  Extended
- Abbildungsmatrizen
  bzgl. verschiedenen Basen :



$B = W \cdot A \cdot T$

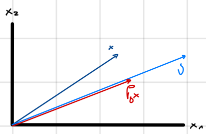
→ Reihenfolge beachten!

- $B$ und $A$ beschreiben beide dieselbe lineare Abbildung $\mathcal{A}$.
  einfach bezüglich verschiedener Basen in Urbild und Bildraum.

- Allgemeine Definitionen :
  "Es gibt nicht nur eine Norm / Skalarprodukt"
  - Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} := \dots$
  - Skalarprodukt $\langle x, y \rangle := \dots$
  - Winkel $\widehat{x, y}$
  - orthogonale Projektionen ( $\boxed{\text{orthogonale Vektoren} \Longleftrightarrow \text{Skalarprodukt} = 0}$ )

- orthogonale Projektion :

$$p_y x := \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \, y$$



$$p_y x = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{16}{20} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Orthonormale Basis ONB :
  - Jeder Basisvektor orthogonal zu jedem anderen
    $\langle \cdot, \cdot \rangle \overset{!}{=} 0$ (für jedes Paar)
  - Jeder Basisvektor normiert
    $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle} \overset{!}{=} 1$

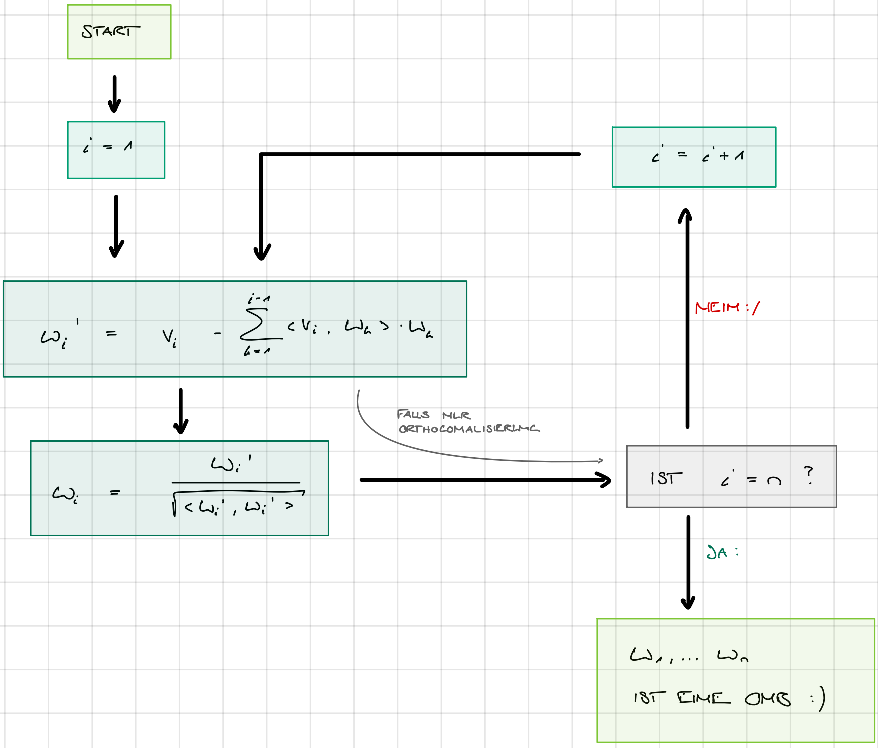
→ Satz von Parseval : Reduktion von beliebigem Skalarprodukt auf euklidisches Skalarprodukt durch Koordinaten bezüglich ONB. (Beispiel letzte Woche)

# Gram - Schmidt - Orthonormalisierung

Gegeben : Menge von linear unabhängigen Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

Gesucht : Orthonormalbasis ONB $w_1, w_2, \dots, w_n$ von $V$.

**Algorithmus :**




↝ Beispiele folgen ...

# BEISPIEL 1 ZU GRAM-SCHMIDT

BILDE ALS $\{v_1, v_2, v_3\} = \{1, x, x^2\}$ (MONOMIALBASIS VON $\mathcal{P}_3$)

EINE ONB BEZÜGLICH DEM SKALARPRODUKT :

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} g(x)\, h(x)\, dx \qquad \text{MIT} \quad g(x), h(x) \in \mathcal{P}_3$$

---

ARGUMENT KANN WEGGELASSEN WERDEN" (IST ALS HILFE GEDACHT)

DEFINITION: "LEERE SUMMEN"

$$w_1'(x) = v_1(x) - 0 = 1$$

$$w_1(x) = \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1/3 : CHECK

$$w_2' = v_2 - \underbrace{\langle v_2, w_1 \rangle}_{\substack{=0 \\ \text{(SYMMETRIE)}}} w_1 = v_2 - 0 = x$$

$$w_2 = \frac{w_2'}{\sqrt{\langle w_2', w_2' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx}} \cdot x = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x$$

2/3 : CHECK

$$w_3' = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \underbrace{\langle v_3, w_2 \rangle}_{\substack{=0 \\ \text{SYMMETRIE}}} w_2 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot w_1 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$w_3 = \frac{w_3'}{\sqrt{\langle w_3', w_3' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2\, dx}} \cdot (x^2 - \tfrac{1}{3}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{45}}} (x^2 - \tfrac{1}{3}) = \frac{\sqrt{10}}{4} (3x^2 - 1)$$

3/3 : CHECK :)

$$\Longrightarrow \quad \text{ONB} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x, \frac{\sqrt{10}}{4} (3x^2 - 1) \right\}$$

FINITO :)

# BEISPIEL 2 ZU GRAM-SCHMIDT

SEIEN $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ; $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ; $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\in \mathbb{R}^3$

FINDE EINE ONB MITTELS GRAM-SCHMIDT UND DEM STANDARD SKALARPRODUKT/EUKLIDISCHE NORM.

---

DEFINITION :) ("LEERE SUMMEN")

$$\omega_1' = v_1 - 0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_1'}{\sqrt{\langle \omega_1', \omega_1' \rangle}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1/3 : CHECK

$$\omega_2' = v_2 - \langle v_2, \omega_1 \rangle \omega_1 = v_2 - \underbrace{\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{=0} \cdot \omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_2'}{\sqrt{\langle \omega_2', \omega_2' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2/3 : CHECK

$$\omega_3' = v_3 - \underbrace{\langle v_3, \omega_1 \rangle}_{=0} \omega_1 - \langle v_3, \omega_2 \rangle \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_3'}{\sqrt{\langle \omega_3', \omega_3' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{(6/5)^2 + (-3/5)^2 + 0^2}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 6/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3/3 : CHECK !

$$\text{ONB} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

# BEISPIEL 2 PART 2 : QR-ZERLEGUNG MIT GRAM-SCHMIDT.

Q : WIE LAUTET DIE QR-ZERLEGUNG VON $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = Q \cdot R$ ?

---

A : WIR HABEN BEREITS ALLE SPALTEN VON A ORTHONORMALISIERT

$$ONB = \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\longrightarrow$ IN MATRIX SCHREIBEN : $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ (Q IST ORTHOGONAL!)

$$A = Q \cdot R$$

$$\Longleftrightarrow Q^T A = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}}$$

BENUTZEN WIR UNSERE ERHALTENE ONB :) (!)

**Satz 4.2.0.20. Parseval**

*Das Skalarprodukt in $V$ lässt sich über das euklidischen Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ berechnen:*

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\,.}$$

NOTATION... NAJA :)

SEI ONB $= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} , \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x , \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1) \right\}$ EINE ONB VON $\mathcal{P}_3$.

SEI DAS SKALARPRODUKT $\langle g, h\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)\, h(x)\, dx$ MIT $g(x), h(x) \in \mathcal{P}_3$

BESTIMME $\langle \frac{2}{\sqrt{2}} , \sqrt{\frac{12}{2}}\, x + \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$.

---

VARIANTE 1: DIREKT IM SKALARPRODUKT (DEFINITION) EINSETZEN.

$$\langle \frac{2}{\sqrt{2}} , \sqrt{\frac{12}{2}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{12}{2}}\, x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dx = \text{LANGE RECHNUNG ...} = \underline{\underline{2}}$$

VARIANTE 2: SATZ VON PARSEVAL:

$h_{ONB}$

KOORDINATEN BEZÜGLICH ONB

$$\langle \frac{2}{\sqrt{2}} , \sqrt{\frac{12}{2}}\, x + \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \mathrel{\hat{=}} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \underline{\underline{2}}$$

NOCH ETWAS THEORIE ...

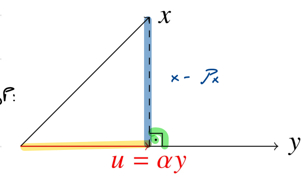
**Definition 4.4.0.1. Projektor**

Sei $V$ ein linearer Raum. Eine lineare Abbildung $\mathscr{P} : V \to V$ heisst *Projektor* falls

$$\mathscr{P}^2 = \mathscr{P} .$$

WENN WIR ALSO EINEN VEKTOR 'PROJEZIERT' / ABGEBILDET HABEN, ÄNDERT SICH DAS RESULTAT NICHT MEHR, WENN WIR DIESES NOCHMALS 'PROJEZIEREN'.

BSP:




**Definition 4.4.0.2. Orthogonale und schiefe Projektoren**

Der Projektor $\mathscr{P} : V \to V$ im linearen Raum $V$ mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, heisst *orthogonaler Projektor* falls

$$x - \mathscr{P}x \perp \operatorname{Bild} \mathscr{P} \text{ für alle } x \in V ,$$

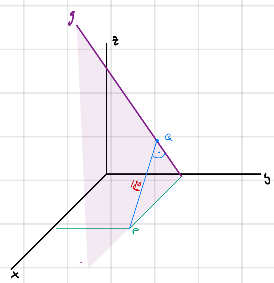
sonst heisst er *schiefer Projektor*.

BSP: BERECHNE DIE ORTHOGONALE PROJEKTION $Q$ VON

$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ AUF DIE GERADE $g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

---

SKIZZE:




$\longrightarrow \quad \overline{PQ} = \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$ ABSTAND VON P ZUR GERADEN g FÜR BELIEBIGES t.

$\longrightarrow \quad \langle \overline{PQ}, g \rangle \overset{!}{=} 0 \iff$ DIESER ABSTAND VON P ZU Q SOLL SENKRECHT ZUM RICHTUNGSVEKTOR VON g STEHEN. (NICHT ZUM OFFSET)!

$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$

$\left\langle \begin{bmatrix} t-1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \right\rangle \overset{!}{=} 0 \iff t^2 - t + t^2 \overset{!}{=} 0$

$\iff \cancel{t_1 = 0}$ ← TRIVIALE LÖSUNG

$t_2 = \frac{1}{2}$

$t_2$ IN GERADENGLEICHUNG EINSETZEN, UM Q ZU BESTIMMEN :)

$\longrightarrow \quad Q = g(\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

# EIGENSCHAFTEN VON ORTH. PROJEKTOREN

**Satz 4.4.0.3. Orthogonale und schiefe Projektoren**

*Der Projektor $\mathscr{P} : V \to V$ im linearen Raum $V$ mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ist einen orthogonaler Projektor genau dann wenn*

$$\langle x, \mathscr{P}y \rangle = \langle \mathscr{P}x, y \rangle \text{ für alle } x, y \in V\,,$$

*d.h. wenn der Projektor $\mathscr{P}$ ein selbstadjungierter Operator ist.*

**Satz 4.4.0.4. Orthogonale und schiefe Projektoren**

*Die Matrix $\mathbf{P}$ ist ein orthogonaer Projektor genau dann wenn*

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}^H = \mathbf{P}\,.$$

*Falls nur die Bedingung $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ erfüllt ist, so ist $\mathbf{P}$ ein schiefer Projektoor.*

Bsp orthogonale Projektion : Sei $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Sei $P_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow P_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P_1$

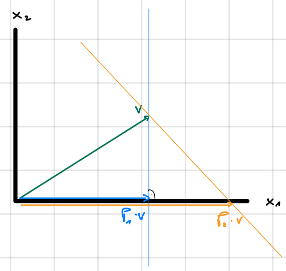
$P_1^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P_1$

Sei $P_2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow P_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P_2$

$P_2^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq P_2$

So ist $P_1 \cdot v = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

So ist $P_2 \cdot v = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$



# Ausgleichsrechnung (Least Squares)

!

→ Frage: Wie kann man etwas überbestimmtes (Messreihe, ...) möglichst gut annähern? zB durch einige Punkte im $\mathbb{R}^2$ eine 'möglichst passende' Gerade legen?

**Allgemein:** $m$ Fehlergleichungen mit $n$ Unbekannten (überbestimmt $\Leftrightarrow$ $m > n$)

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n - c_1 = r_1$$
$$a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n - c_2 = r_2$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n - c_m = \underbrace{r_m}$$

Residuum: Differenz zwischen 'theoretischem / exaktem' Wert und 'gemessenem' Wert

$\Longleftrightarrow$ $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r}$

(Ergebnisvektor) 'theoretisch / exakter' Werte

Koeffizienten

Unbekannte

Residuum: Am kleinsten wenn $\langle a^{(i)}, r \rangle = 0 \quad \forall i$ (Herleitung im Zusatz)

$$\boxed{\Longrightarrow \text{ Normalengleichung: } \quad \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}}$$

→ Falls $A = QR = Q \cdot \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Longrightarrow$ Löse $\underline{\underline{R}}_0 \underline{x} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{c}$ → Sgt. nächste Woche :)

## Im Sinne der kleinsten Quadrate (euklidische Norm):

Satz: 1) Ist $\hat{x}$ eine Lösung der Normalengleichung, so minimiert dieses $\hat{x}$ die Fehlergleichung $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r}$ im Sinne der kleinsten Quadrate.

Das heisst $\|r\|_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2}$ ist minimal.

2) Sind die Spalten von $A$ linear unabhängig, so besitzt das Ausgleichsproblem eine eindeutige Lösung.

# BSP 1

WIR MESSEN DIE ZURÜCKGELEGTE DISTANZ EINES ZUGES IM TESSIN UND ERHALTEN FOLGENDES :

| $t_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | ZEIT [h] |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_i$ | 1 | 3 | 9 | 14 | ZURÜCKGELEGTE DISTANZ [km] |

⟶ WIR KENNEN DEN ZUSAMMENHANG $s(t) = S_A + v \cdot t$

⟶ BESTIMME $S_A$, $v$ IM SINNE DER KLEINSTEN QUADRATE.

---

1) FEHLER (VEKTOR) BERECHNEN :
2) MATRIXSCHREIBWEISE
3) EINSETZEN
4) NORMALENGLEICHUNG $\underline{A}^T \underline{A}\, \underline{x} = \underline{A}^T \underline{c}$ LÖSEN

1) 2)

$$\left.\begin{aligned} s(t_1) - S_1 &= r_1 \\ s(t_2) - S_2 &= r_2 \\ s(t_3) - S_3 &= r_3 \\ s(t_4) - S_4 &= r_4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} S_A + vt_1 - S_1 &= r_1 \\ S_A + vt_2 - S_2 &= r_2 \\ S_A + vt_3 - S_3 &= r_3 \\ S_A + vt_4 - S_4 &= r_4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} S_A \\ v \end{bmatrix}}_{\underline{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}}_{\underline{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}}_{\underline{r}}$$

'THEORETISCHER' WERT — GEMESSENER WERT — RESIDUUM (FEHLER VEKTOR)

3)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \; ; \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} S_A \\ v \end{bmatrix} \; ; \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$$

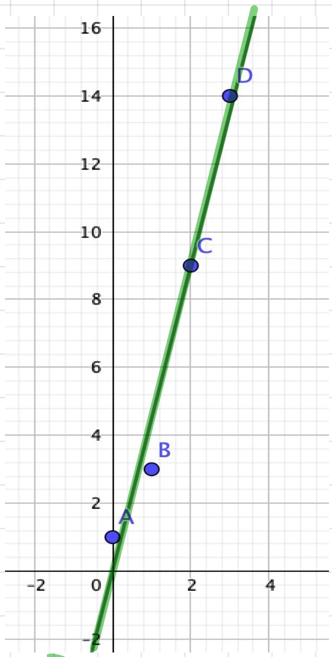
4)

$$\underline{A}^T \underline{A}\, \underline{x} = \underline{A}^T \underline{c} \iff \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_A \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 63 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{aligned} S_A &= 0 \\ v &= 4.5 \end{aligned}$$

⟶ $\boxed{S(t) = 0 + 4.5\,t}$

GRAPHISCH :



# Bsp 2 , Ausgleichsrechnung

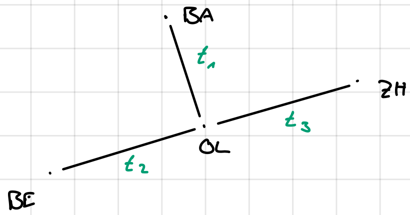
Daniel (your unemployed friend) fährt jede Woche folgende Strecken mit dem Zug und misst die Fahrzeiten:

| | | |
|---|---|---|
| Olten - Zürich | : | 28 min |
| Olten - Bern | : | 30 min |
| Olten - Basel, SBB | : | 29 min |
| Zürich - Basel, SBB | : | 55 min |
| Basel, SBB - Bern | : | 56 min |

Bestimme die ausgeglichenen Werte der einzelnen Fahrzeiten zwischen Olten/Zürich, Olten/Bern, Olten/Basel, SBB.

---

0) Definiere die Unbekannten (mit Skizze, ...)  Map :




1) Fehler (Vektor) berechnen :
2) Matrixschreibweise
3) Einsetzen
4) Normalengleichung $\underset{=}{A}^T \underset{=}{A} \underset{-}{x} = \underset{=}{A}^T \underset{-}{c}$ lösen

1) 3)

$$\begin{aligned} t_3 - 28 &= r_1 \\ t_2 - 30 &= r_2 \\ t_1 - 29 &= r_3 \\ t_1 + t_3 - 55 &= r_4 \\ t_1 + t_2 - 56 &= r_5 \end{aligned}$$

$\underbrace{\qquad}_{\text{„theoretischer" Wert}}$ $\underbrace{\qquad}_{\text{„gemessener" Wert}}$ $\underbrace{\qquad}_{\text{Residuum}}$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underset{=}{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}}_{\underset{-}{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 28 \\ 30 \\ 29 \\ 55 \\ 56 \end{bmatrix}}_{\underset{-}{c}} = \underbrace{\underset{-}{r}}_{\underset{-}{r}}$$

4) Normalengleichung : $A^TAx = A^Tc$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 28 \\ 30 \\ 29 \\ 55 \\ 56 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 86 \\ 83 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} t_1 &= 27.75 \text{ min} \\ t_2 &= 29.125 \text{ min} \\ t_3 &= 27.625 \text{ min} \end{aligned}$$