RECAP – W09

- **Gram-Schmidt:**

Orthonormalisierung von n linear unabhängigen Vektoren

START

$\downarrow$

$i = 1$

$\downarrow$

$$\boxed{w_i' = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i, w_k \rangle \cdot w_k}$$

Falls nur Orthogonalisierung

$\downarrow$

$$\boxed{w_i = \frac{w_i'}{\sqrt{\langle w_i', w_i' \rangle}}} \longrightarrow \boxed{\text{Ist } i = n \text{ ?}}$$

Nein :/ $\rightarrow$ $i = i + 1$

Ja : $\rightarrow$ $w_1, \dots w_n$ ist eine ONB :)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} ; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$$

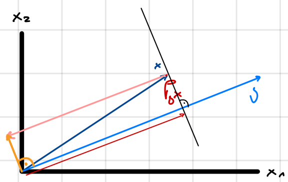
Orthonormalbasis

$$\text{ONB} = \left\{ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = Q \cdot R \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$Q^T A = R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

- **Orthogonale / Schiefe Projektionen:**



$$P_y x := \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} y$$

(orthogonale Projektion in Skizze)

$$v := x - P_y x \quad \perp y$$

- **Ausgleichsrechnung:**

Daten (gemessene Werte)

t_i	0	1	2	3
s_i	1	3	9	14

Zeit [h]

zurückgelegte Distanz [km]

$$s(t) = S_A + v \cdot t$$

Theoretische Beziehung

$$\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r}} \longrightarrow \boxed{\text{Normalengleichung: } \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}}$$

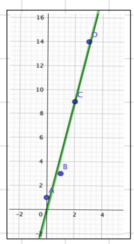
gemessene Werte

Residuum

Unbekannte

Koeffizienten

Theoretische Werte



$S_A = 0$

$v = 4.5$

Gesucht: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - c\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} (Ax - c)^T (Ax - c)$

$$\nabla_x (Ax - c)^T (Ax - c) \overset{!}{=} 0 \iff 2A^T(Ax - b) \overset{!}{=} 0$$

$$\iff \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}$$

Bsp 2 , Ausgleichsrechnung

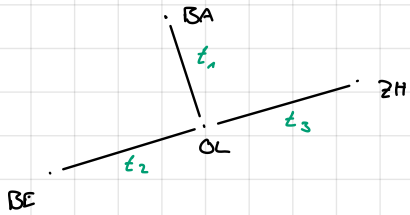
Daniel (your unemployed friend) fährt jede Woche folgende Strecken mit dem Zug und misst die Fahrzeiten:

Olten - Zürich	:	28 min
Olten - Bern	:	30 min
Olten - Basel, SBB	:	29 min
Zürich - Basel, SBB	:	55 min
Basel, SBB - Bern	:	56 min

Bestimme die ausgeglichenen Werte der einzelnen Fahrzeiten zwischen Olten/Zürich, Olten/Bern, Olten/Basel, SBB.

---

0) Definiere die Unbekannten (mit Skizze, ...)   Map:



1) Fehler (Vektor) berechnen:

2) Matrixschreibweise

3) Einsetzen

4) Normalengleichung $\underset{=}{A}^T \underset{=}{A} \underline{x} = \underset{=}{A}^T \underline{c}$ lösen

1) 3)

$$\begin{aligned}
t_3 - 28 &= r_1 \\
t_2 - 30 &= r_2 \\
t_1 - 29 &= r_3 \\
t_1 + t_3 - 55 &= r_4 \\
\underbrace{t_1 + t_2}_{\text{"theoretischer" Wert}} - \underbrace{56}_{\text{"gemessener" Wert}} &= \underbrace{r_5}_{\text{Residuum}}
\end{aligned}
\Longrightarrow
\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underset{=}{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 28 \\ 30 \\ 29 \\ 55 \\ 56 \end{bmatrix}}_{\underline{c}} = \underbrace{\underline{r}}_{\underline{r}}$$

4) Normalengleichung: $A^T A x = A^T c$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 28 \\ 30 \\ 29 \\ 55 \\ 56 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 86 \\ 83 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \underline{\underline{\begin{aligned} t_1 &= 27.75 \text{ min} \\ t_2 &= 29.125 \text{ min} \\ t_3 &= 27.625 \text{ min} \end{aligned}}}$$

AUSGLEICHSRECHNUNG MIT QR

$\longrightarrow$ NOCH GEEIGNETER IN NUMERISCHEM VERFAHREN: QR-ZERLEGUNG - METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE.

· VERFAHREN ZUM LÖSEN DER FEHLERGLEICHUNG $\underline{A}\underline{x} - \underline{c} = \underline{r}$ MIT HILFE DER QR-ZERLEGUNG:

1) $\underline{R} := \underline{Q}^T \underline{A} = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (QR-ZERLEGUNG VON $A, \dots$)

2) $\underline{d} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} := \underline{Q}^T \underline{c}$ (BERECHNE d)

3) $\underline{R_0}\, \underline{x} = d_0$ (LÖSEN)

BEISPIEL 3 AUSGLEICHSRECHNUNG MIT QR

BESTIMME DIE BESTE PARABEL (IM SINNE DER KLEINSTEN QUADRATE), WELCHE DURCH DIE PUNKTE

$(-3, 10)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$ UND $(2, 5)$ GEHT.

ANDERST FORMULIERT: SUCHE a, b, d SO DASS $f(x) = ax^2 + bx + d$ "BESTMÖGLICH" DURCH DIE PUNKTE $(-3, 10)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$ UND $(2, 5)$ GEHT.

$$\left.\begin{aligned} f(-3) - 10 &= r_1 \\ f(0) - 2 &= r_2 \\ f(1) - 3 &= r_3 \\ f(2) - 5 &= r_4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix}}_{\underline{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\underline{c}} = \underbrace{\underline{r}}_{\underline{r}}$$

1) ÜBERPRÜFE:)

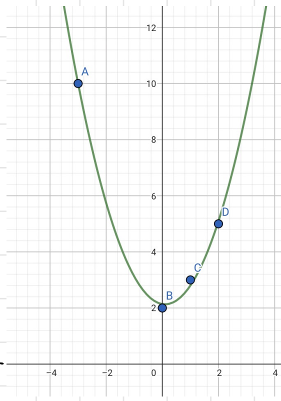
$$\underbrace{A}_{A} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} -0.91 & 0.41 & -0.03 & 0.05 \\ 0 & 0 & -0.85 & -0.53 \\ -0.1 & -0.36 & -0.49 & 0.79 \\ -0.4 & -0.84 & 0.19 & -0.32 \end{bmatrix}}_{\underline{Q}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -9.90 & 1.82 & -1.41 \\ 0 & -3.27 & -0.79 \\ 0 & 0 & -1.18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{R}}$$

$\boxed{} \hat{=} R_0$

2) $$\underline{d} = \underline{Q}^T \underline{c} = \begin{bmatrix} -0.91 & 0.41 & -0.03 & 0.05 \\ 0 & 0 & -0.85 & -0.53 \\ -0.1 & -0.36 & -0.49 & 0.7 \\ -0.4 & -0.84 & 0.19 & -0.32 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -11.41 \\ -1.15 \\ -2.51 \\ 0.26 \end{bmatrix}$$

$\boxed{} \hat{=} d_0$

3) $R_0 x = d_0$ LÖSEN ERGIBT: $\underline{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.82 \\ -0.16 \\ 2.14 \end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{f(x) = 0.82x^2 - 0.16x + 2.14}}$



DETERMINANTE (THEORIE / EIGENSCHAFTEN)

Definition 6.1.0.3. Determinante

Die Determinante ist eine Funktion

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n} \to \mathbb{R}.$$

nxn MATRIX !

mit folgender Eigenschaften:

(D1) $\det \mathbf{I}_n = 1$,

(D2) det wechselt das Vorzeichen wenn zwei Zeilen oder Spalten vertauscht werden (*Antisymmetrie*).

(D3) det ist linear in jeder Zeile und Spalte:

$$\det \begin{bmatrix} ta & tb \\ c & d \end{bmatrix} = t \cdot \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a+\tilde{a} & b+\tilde{b} \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ c & d \end{bmatrix}.$$

WICHTIG FÜR DIE PRÜFUNG ...

Eigenschaften (Zusammenfassung, s. unten) [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

1. $\det E = 1$ für Einheitsmatrix E
2. $\det\left(A^\mathsf{T}\right) = \det(A)$, wobei A^T die transponierte Matrix von A ist.
3. $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
4. Für quadratische Matrizen A und B gleicher Größe gilt der *Determinantenmultiplikationssatz*:
   $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
5. $\det(cA) = c^n \det(A)$, für eine $n \times n$ Matrix A und eine Zahl c.
6. Für eine Dreiecksmatrix A gilt $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. :)
7. Besteht eine Reihe oder Spalte aus *Nullen* ist die Determinante 0.
8. Sind zwei *Spalten* (Zeilen) *gleich* ist die Determinante 0.
9. *Vertauscht* man zwei *Spalten* (Zeilen) so ändert eine Determinante ihr Vorzeichen.
10. Sind $v_1, \ldots, v_n$ die Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) einer Matrix und c eine Zahl, so gilt:
    a1) $\det(v_1 + w, v_2, \ldots v_n) = \det(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \det(w, v_2, \ldots, v_n)$
    a2) $\det(cv_1, v_2, \ldots v_n) = c\det(v_1, v_2, \ldots v_n)$,
    entsprechend für die anderen Spaltenvektoren (Zeilenvektoren).
    b) $\det(v_1, \ldots v_n)$ ist das (orientierte) *Volumen* (*Flächeninhalt* im Fall n=2) des von den Vektoren $v_1, \ldots v_n$ aufgespannten Polytopes (Parallelogramm).
11. *Addition eines Vielfachen* einer Spalte (Zeile) zu einer anderen Spalte (Zeile) ändert eine Determinante nicht. Man kann also eine Determinante mit einem abgeschwächten Gauss-Algorithmus zu einer Dreiecks-Determinante umformen und Eigenschaft 6. zur Berechnung der Determinante verwenden. Man beachte Eigenschaft 9. und 10.a2).
12. Nur für 3×3-Determinanten gilt die Regel von Sarrus:

Berechnung von Determinanten (2x2, 3x3, nxn)

2x2 :

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

3x3 : Regel von Sarrus

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right) = + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

copy 1 & 2 col.

nxn : Entwicklungssatz von Laplace (gilt für alle quadratischen Matrizen)

Formal : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Entwicklung nach der j-ten Spalte.

oder : $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Entwicklung nach der i-ten Zeile.

→ Man darf eine Determinante nach einer beliebigen Zeile oder Spalte (vorzugsweise mit vielen Nullen) entwickeln, solange man dabei das schachbrettartige Vorzeichenmuster beibehält.

ZB 3x3 : Vorzeichenmuster :

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

→ Beispiele incoming :)

→ Common Shortcuts :

- Determinanten von Matrizen mit gleichen Zeilen / Spalten ist null.
- Determinanten von Matrizen mit Null - Zeilen / Spalten ist null.
- Determinante von Dreiecksmatrizen (Diagonalmatrizen) ist das Produkt ihrer Diagonalelemente.

Beispiele , Determinanten

Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Berechne die Determinante (1x mit Sarrus, 1x mit Laplace)

Sarrus :

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ - & - & - & & \end{array} \Longrightarrow 0\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot 3\cdot 1 = \underline{\underline{3}}$$

Laplace :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Wähle Zeile / Spalte mit vielen Nullen!

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\longrightarrow +1\cdot \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 1\cdot \det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 0\cdot \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow +1\cdot(-3) - 1\cdot(-6) + 0$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{3}} = \det(A)$$

"Schachbrett" :)

Mein Versuch auf Deutsch,) haha...

'Wähle' der Reihe nach alle Elemente dieser Zeile / Spalte und bilde die gewichtete Summe der Determinanten der 'kleineren Restmatrizen' nach dem 'Streichen' der Zeile / Spalte des ausgewählten Elementes.

SHORTCUTS INVERSE:

FALLS $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

DETERMINANTE $\det(A)$
FÜR 2x2 !

FALLS $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$: $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix},$

FÜR 3x3 MATRIZEN :

$$\boxed{\det(A) = a\cdot e\cdot i + b\cdot f\cdot g + c\cdot d\cdot h - g\cdot e\cdot c - h\cdot f\cdot a - i\cdot d\cdot b}$$

KOMMEN WIR SPÄTER
DRAUF ZURÜCK ... :)

SONST : KEINE SHORTCUTS ... SCHEMA VON VORHIN.

EIGENWERTE (EW) / EIGENVEKTOREN (EV)

!

BEI MATRIXMULTIPLIKATIONEN MIT VEKTOREN (ZB $\underline{\underline{B}}\underline{x} = \underline{b}$) KANN JA IRGENDEIN VEKTOR ALS RESULTAT HERAUSKOMMEN ... (GESPIEGELT, GEDREHT, ...)

→ FALLS WIR EINE $n \times n$ MATRIX $\underline{\underline{A}}$ AUF EINEN VEKTOR $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ANWENDEN (ALSO $\underline{\underline{A}}\underline{x}$), UND DAS RESULTAT $\underline{x}'$ ABER KOLINEAR IST ZU $\underline{x}$ (ALSO: $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{x}' = \lambda \underline{x}$) DANN IST $\lambda \in \mathbb{C}$ EIN EIGENWERT VON A.

$\underline{x}$ IST DANN EIN EV VON $\underline{\underline{A}}$ ZUM EW λ.

Definition 7.2.0.2. Eigenwertproblem

$\lambda \in \mathbb{C}$ heisst *Eigenwert* der Matrix $\mathbf{A}$, falls es ein $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gibt, sodass $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}}$.
$\mathbf{x}$ heisst dann *Eigenvektor von* $\mathbf{A}$ *zum Eigenwert* λ.

↳ DIE MENGE ALLER EW BILDET DAS SPEKTRUM : $\mathrm{Spec}(\underline{\underline{A}}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$

→ NICE, ABER WIE FINDEN WIR DIESE EW UND EV ?

Definition 7.2.0.7. Charakteristische Gleichung

Um die Eigenwerte einer Matrix $\mathbf{A}$ auszurechnen, bedienen wir uns der Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0\,.$$

KURZE HERLEITUNG IM SKRIPT P. 158 UNTEN :)

Diese Gleichung heisst die *charakteristische Gleichung* der Matrix $\mathbf{A}$.

→ BEI DREIECKSMATRIZEN SIND DIE EIGENWERTE GERADE DIE DIAGONALELEMENTE !

EIGENVEKTOR ZU λ_i (BELIEBIGER EW) FINDEN : $(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{I}})\underline{x} = 0$ LÖSEN

→ COOL, UND WIE VIELE EIGENWERTE HAT EINE $n \times n$ MATRIX?

Satz 7.2.0.9. Existenz und Anzahl der Eigenwerte einer Matrix

Jede $n \times n$-Matrix hat mindestens ein Eigenwert und kann bis maximal n verschiedene Eigenwerte haben.

↳ REELLE MATRIZEN KÖNNEN KOMPLEXE EIGENWERTE HABEN (PAARWEISE λ UND λ^*) (SKRIPT p. 158)

→ BEISPIEL FOLGT :)

Satz 3.24 Eigenschaften des *charakteristischen Polynoms*
Seien $n \in \mathbb{N}^+$ und $A \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$. Dann ist p_A ein *Polynom* vom *Grad* n der Form

$$p_A(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0, \tag{3.196}$$

wobei in jedem Fall gilt

(a) $a_n = 1$ **(b)** $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$ **(c)** $a_0 = (-1)^n \cdot \det(A)$

WAS IST a_0 FÜR NICHT-INVERTIERBARE MATRIZEN?

BEISPIEL 0, EIGENWERTE

SEI $A := \begin{pmatrix} \pi & i & 3 & \sqrt{5} \\ 0 & 7 & e & b \\ 0 & 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ MIT $a, b \in \mathbb{R}$. BESTIMME DIE EIGENWERTE VON A.

FÜR WELCHE WERTE VON $a, b \in \mathbb{R}$ EXISTIERT A^{-1}?

$\lambda_1 = \pi$

$\lambda_2 = 7$

$\lambda_3 = a - 1$

$\lambda_4 = 1$

$\cancel{\lambda_5 =}$

A^{-1} EXISTIERT FALLS $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ UND $b \in \mathbb{R}$

A HAT DANN VOLLEN RANG $\iff$ A IST INVERTIERBAR $\iff$ $\det(A) \neq 0$ $\iff$ $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ EXISTIERT

BEISPIEL 1 : EIGENWERTE , EIGENVEKTOREN

BERECHNE DIE EIGENWERTE (EW) VON $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

---

1) EW BESTIMMEN : $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$ LÖSEN

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right) \overset{!}{=} 0$$

SARRUS...

$$\Longleftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + \lambda \overset{!}{=} 0$$

← (NULLSTELLEN BESTIMMEN)

$$\Longleftrightarrow \lambda\left(-(1-\lambda)^2 + 1\right) \overset{!}{=} 0 \longrightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 0}} \quad (EW_1)$$

$$\Longleftrightarrow -\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) + 1 \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda \cancel{-1} \cancel{+1} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda(-\lambda + 2) \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow \underline{\underline{\lambda_2 = 0}} \quad (EW_2)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\lambda_3 = 2}} \quad (EW_3)$$

WIR BEMERKEN : $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$

DER EW 0 KOMMT ZWEI MAL VOR.

⟹ SEINE ALGEBRAISCHE MULTIPLIZITÄT (AM) IST GLEICH 2

$\lambda_3 = 2$ KOMMT NUR 1 MAL VOR

⟹ SEINE ALGEBRAISCHE MULTIPLIZITÄT (AM) IST GLEICH 1

⟹ UNSERE 3 EIGENWERTE VON A SIND $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$

Definition 7.2.0.16. Algebraische Multiplizität (AM)

Die *algebraische Multiplizität* (auch *algebraische Vielfachheit* genannt) zeigt uns, wie oft λ unter den Nullstellen der charakteristischen Gleichung vorkommt.

BEISPIEL 1.2 : EIGENWERTE , EIGENVEKTOREN

BERECHNE DIE EIGENVEKTOREN (EV) DER ZUGEHÖRIGEN EW VON $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

FÜR ALLE EIGENWERTE BERECHNEN

EIGENVEKTOR ZU λ_i (BELIEBIGER EW) FINDEN : $(A - \lambda_i I)x = 0$ LÖSEN

↝ EV_1 ZU EW_1 : $\lambda_1 = 0$

$$(A - \lambda_1 I)x \overset{!}{=} 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{III - 2I}{\overset{II + I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_2 , x_3 FREIE VARIABLE : $s, t \in \mathbb{R}$

$$x = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{x} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ t \end{bmatrix}} = \text{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\llcorner EV_1$

DIESEN SPAN NENNT MAN DEN EIGENRAUM ZU $\lambda_1 (=\lambda_2) = 0$

$$\Longrightarrow E_0 = \text{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

⟶ DA $EW_1 = EW_2$ $(\lambda_1 = 0 = \lambda_2)$ HABEN SIE AUCH DEN SELBEN EIGENVEKTOR !

⟶ DIE DIMENSION VON EIGENRAUM IST GLEICH DER GEOMETRISCHEN MULTIPLIZITÄT (GM).

⟹ ALSO GM VON λ_1 IST 2

↝ EV_3 ZU EW_3 : $\lambda_3 = 2$

$$(A - \lambda_3 I)x \overset{!}{=} 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{III + 2I}{\overset{II - I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \boxed{\underline{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix}} \longrightarrow \text{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$ FREIE VARIABLE

$\llcorner EV_3$

EIGENRAUM ZU λ_3 $(=2)$:

$$E_2 = \text{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

⟹ GM VON λ_3 IST GLEICH 1

→ HIER NOCHMALS DIE FORMALEN DEFINITIONEN :

Definition 7.2.0.13. Eigenraum

Der *Eigenraum zum Eigenwert* λ ist der lineare Raum, der aus Eigenvektoren zu dem Eigenwert λ besteht:

$$E_\lambda = \operatorname{span}\{\mathbf{x}, \text{ mit } \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}\,.$$

Definition 7.2.0.17. Geometrische Multiplizität (GM)

Die *geometrische Multiplizität* (auch *geometrische Vielfachheit* genannt) eines Eigenwertes ist die Dimension vom Eigenraum.

EIGENSCHAFTEN :

Satz 7.2.0.19. Multiplizitätsregel

Für die verschiedenen Multiplizitäten eines Eigenwerts gilt:

$$1 \leq GM \leq AM\,. \tag{7.2.0.20}$$

Satz 7.2.0.18. Ähnliche Matrizen haben gleiche Eigenwerte

Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom; sie haben also die gleichen Eigenwerte mit den gleichen algebraischen Multiplizitäten.

Satz 7.2.0.11. Lösungen für $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Es gibt für $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nicht-triviale Lösungen ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) dann und nur dann, wenn 0 ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ ist.

→ WARUM ?:)

Satz 7.2.0.23. Verschiedene Eigenwerte haben linear unabhängige Eigenvektoren

Sei $\mathbf{A}$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ Eigenwerte, die sich alle unterscheiden. Dann sind die entsprechenden Eigenvektoren $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k$ linear unabhängig.

$\lambda_1, \ldots \lambda_k$ VERSCHIEDEN $\Longrightarrow$ $s_1, \ldots s_k$ LIN. UNABHÄNGIG.

$\cancel{\Longleftarrow}$ ← BEISPIEL UNTEN

DIAGONALISIEREN (NICHT JEDE MATRIX IST DIAGONALISIERBAR!)

Definition 7.1.0.4. Diagonalisierung

Nehmen wir an, es gibt eine Matrix $\mathbf{S}$, so dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1},$$

wobei $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix ist. Ist diese *Diagonalisierung* möglich, so nennen wir die Matrix $\mathbf{A}$ *diagonalisierbar*.

→ GRANDE, ABER WIE DIAGONALISIEREN WIR JETZT WIRKLICH?

Satz 7.2.0.22. ***n*** **linear unabhängige Eigenvektoren diagonalisieren eine** $n \times n$**-Matrix**

Sei $\mathbf{A}$ *eine* $n \times n$*-Matrix mit* n *linear unabhängigen Eigenvektoren, und seien diese Eigenvektoren die Spalten einer Matrix* $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 \cdots\cdots \mathbf{s}_n \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{D},$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *Eigenwerte von* $\mathbf{A}$.

1) BILDE DIE MATRIX $\underline{D} := \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$ AUS DEN EW

2) BILDE DIE MATRIX $\underline{S} := \begin{bmatrix} \underline{EV}_1 & \underline{EV}_2 & \cdots & \underline{EV}_n \end{bmatrix}$ AUS DEN EV

3) BERECHNE $\underline{S}^{-1}$

$\longrightarrow \underline{A} = \underline{S}\,\underline{D}\,\underline{S}^{-1}$

→ BRAVO, UND GEHT DAS IMMER? :)

→ NEIN :/

BEISPIEL 1.3 : DIAGONALISIEREN

„LÄSST SICH A DIAGONALISIEREN ?"

BEGRÜNDE. (BERECHNE $S^{-1} \cdot S \cdot A$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

JA, SI, OUI, YES!

ABER WARUM ? :)

EIGENVEKTORE (SCHON BERECHNET)

$S := [EV_1 \; EV_2 \; EV_3]$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}}_{D := diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = \underline{D} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

→ WEIL ALLE ALGEBRAISCHEN MIT DEN JEWEILIGEN GEOMETRISCHEN MULTIPLIZITÄTEN ÜBEREINSTIMMEN :)

$\lambda_1 = 0$: AM VON λ_1 WAR 2 $\hat{=}$ GM VON λ_1 WAR AUCH 2

$\lambda_3 = 2$: AM VON λ_3 WAR 1 $\hat{=}$ GM VON λ_3 WAR AUCH 1

Satz 7.2.0.26. Verhältnis zwischen GM und AM entscheidet ob diagonalisierbar oder nicht

Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ *ein Eigenwert besitzt dessen geometrische Multiplizität strikt kleiner als die algebraische Multiplizität ist, dann ist die Matrix nicht diagonalisierbar.*
Wenn für alle Eigenwerte die geometrische Multiplizität gleich der algebraischer Multiplizität ist, dann ist die Matrix diagonalisierbar.

!

↳ NUR DANN :)

ANWENDUNGEN : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A^k = (SDS^{-1})^k = \overbrace{(SDS^{-1})\underbrace{(SDS^{-1})(SDS^{-1})}_{=I}\underbrace{(SDS^{-1})(SDS^{-1})}_{=I}\dots(SDS^{-1})}^{k\text{-MAL}}$$

$$= S D^k S^{-1}$$

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & d_3 & \\ 0 & & & \ddots \; d_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & & 0 \\ & d_2^k & & \\ & & d_3^k & \\ 0 & & & \ddots \; d_n^k \end{bmatrix}$$

ANALOG ZU $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(SDS^{-1})^n t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{SD^nS^{-1} t^n}{n!}$$

$$= S\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n t^n}{n!}\right] S^{-1} = S \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & 0 \\ & e^{d_2 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & e^{d_n t} \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n t^n}{n!} = I + tD + \frac{t^2}{2} D^2 + \frac{t^3}{3!} D^3 + \dots + \frac{t^n}{n!} D^n$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_1^n}{n!} t^n & & & 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_2^n}{n!} t^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n^n}{n!} t^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & & 0 \\ & e^{d_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{d_n t} \end{bmatrix}$$

Eigenschaften: Matrix Exponential

→ **Satz 3.27** Rechenregeln des *Matrix-Exponentials*
Seien $n, p \in \mathbb{N}^+$, $A \in \mathbb{M}(n,n,\mathbb{R})$ und $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt folgendes.

(a) $\mathrm{e}^{a \cdot A} \cdot \mathrm{e}^{b \cdot A} = \mathrm{e}^{(a+b) \cdot A}$

(b) $\left(\mathrm{e}^{A}\right)^{p} = \mathrm{e}^{p \cdot A}$

(c) $\left(\mathrm{e}^{A}\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$

(d) $\left(\mathrm{e}^{A}\right)^{T} = \mathrm{e}^{A^T}$

→ Ziemlich intuitiv für die meisten Regeln, aber Achtung...

Satz 3.26 *Determinante* eines *Matrix-Exponentials*
Seien $n \in \mathbb{N}^+$ und $A \in \mathbb{M}(n,n,\mathbb{R})$, dann gilt

$$\boxed{\det\left(\mathrm{e}^{A}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)} > 0.} \tag{3.225}$$

iv) Das *Matrix-Exponential* einer *spurlosen Matrix* ist offensichtlich *unimodular*, denn

$$\mathrm{tr}(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{\det\left(\mathrm{e}^{A}\right)}} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)} = \mathrm{e}^{0} = \underline{\underline{1.}} \tag{3.226}$$

Achtung: gilt im Allgemeinen nicht für alle Matrizen :)

Satz 3.28 Spezielle Rechenregel des *Matrix-Exponentials*
Seien $n \in \mathbb{N}^+$ und $A, B \in \mathbb{M}(n,n,\mathbb{R})$ *kommutierend*, d.h.

$$[A, B] = 0, \tag{3.227}$$

dann gilt

$$\boxed{\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A} \cdot \mathrm{e}^{B} = \mathrm{e}^{B} \cdot \mathrm{e}^{A}.} \tag{3.228}$$

Die *Matrix-Exponentiale* von *ähnlichen Matrizen* sind ebenfalls *ähnlich*.