RECAP_W10

- AUSGLEICHSRECHNUNG :

DATEN (GEMESSENE WERTE)

t_i	0	1	2	3	ZEIT [h]
s_i	1	3	9	14	ZURÜCKGELEGTE DISTANZ [km]

$s(t) = S_0 + v \cdot t$ — THEORETISCHE BEZIEHUNG

$\rightarrow$ $\boxed{\underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{x}}_{\text{THEORETISCHE WERTE}} - \underline{c} = \underline{r}}$

KOEFFIZIENTEN ($\underline{\underline{A}}$), UNBEKANNTE ($\underline{x}$), GEMESSENE WERTE ($\underline{c}$), RESIDUUM ($\underline{r}$)

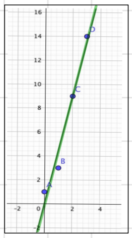
1) $\underline{\underline{R}} := \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (QR-ZERLEGUNG VON A, ...)

2) $\underline{d} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} := \underline{\underline{Q}}^T \underline{c}$ (BERECHNE d)

3) $\underline{\underline{R_0}}\,\underline{x} = d_0$ (LÖSEN)

NORMALENGLEICHUNG :

$$\boxed{\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}}$$

$\rightarrow$ 

$S_0 = 0$

$v = 4.5$

- DETERMINANTEN : - EIGENSCHAFTEN

- BERECHNUNG : - 2×2

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}$$

- 3×3

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right) = + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

- $n \times n$: - LAPLACE ENTWICKLUNGSSATZ
  - ABGESCHLOSSENER GAUSS $\longrightarrow$ ZSF $\longrightarrow$ PRODUKT DER DIAGONALELEMENTE

$$\boxed{\det(A) = 0 \iff A \text{ IST NICHT INVERTIERBAR } (= \text{SINGULÄR})}$$

!

EIGENWERTE (EW) / EIGENVEKTOREN (EV)

BEI MATRIXMULTIPLIKATIONEN MIT VEKTOREN (ZB $Bx = b$) KANN JA IRGENDEIN VEKTOR ALS RESULTAT HERAUSKOMMEN ... (GESPIEGELT, GEDREHT, ...)

→ FALLS WIR EINE $n \times n$ MATRIX A AUF EINEN VEKTOR $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ANWENDEN (ALSO Ax), UND DAS RESULTAT x' ABER KOLINEAR IST ZU x (ALSO: $Ax = x' = \lambda x$) DANN IST $\lambda \in \mathbb{C}$ EIN EIGENWERT VON A.

x IST DANN EIN EV VON A ZUM EW λ.

Definition 7.2.0.2. Eigenwertproblem

$\lambda \in \mathbb{C}$ heisst *Eigenwert* der Matrix $\mathbf{A}$, falls es ein $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gibt, sodass $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}}$.
$\mathbf{x}$ heisst dann *Eigenvektor von* $\mathbf{A}$ *zum Eigenwert* λ.

└→ DIE MENGE ALLER EW BILDET DAS SPEKTRUM : $Spec(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$

→ NICE, ABER WIE FINDEN WIR DIESE EW UND EV ?

Definition 7.2.0.7. Charakteristische Gleichung

Um die Eigenwerte einer Matrix $\mathbf{A}$ auszurechnen, bedienen wir uns der Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0\,.$$

Diese Gleichung heisst die *charakteristische Gleichung* der Matrix $\mathbf{A}$.

KURZE HERLEITUNG IM SKRIPT P. 158 UNTEN :)

→ BEI DREIECKSMATRIZEN SIND DIE EIGENWERTE GERADE DIE DIAGONALELEMENTE !

(BELIEBIGER EW)

EIGENVEKTOR ZU λ_i FINDEN : $(A - \lambda_i I)x = 0$ LÖSEN

→ COOL, UND WIE VIELE EIGENWERTE HAT EINE $n \times n$ MATRIX?

Satz 7.2.0.9. Existenz und Anzahl der Eigenwerte einer Matrix

Jede $n \times n$-Matrix hat mindestens ein Eigenwert und kann bis maximal n verschiedene Eigenwerte haben.

↳ REELLE MATRIZEN KÖNNEN KOMPLEXE EIGENWERTE HABEN (PAARWEISE λ UND λ^*) (SKRIPT p. 158)

→ BEISPIEL FOLGT :)

Satz 3.24 Eigenschaften des *charakteristischen Polynoms*
Seien $n \in \mathbb{N}^+$ und $A \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$. Dann ist p_A ein *Polynom* vom *Grad* n der Form

$$p_A(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0, \tag{3.196}$$

wobei in jedem Fall gilt

(a) $a_n = 1$ **(b)** $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$ **(c)** $a_0 = (-1)^n \cdot \det(A)$

WAS IST a_0 FÜR NICHT-INVERTIERBARE MATRIZEN?

BEISPIEL 0, EIGENWERTE

SEI $A := \begin{pmatrix} \pi & i & 3 & \sqrt{5} \\ 0 & 7 & e & b \\ 0 & 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ MIT $a, b \in \mathbb{R}$. BESTIMME DIE EIGENWERTE VON A.

FÜR WELCHE WERTE VON $a, b \in \mathbb{R}$ EXISTIERT A^{-1}?

$$\lambda_1 = \pi$$
$$\lambda_2 = 7$$
$$\lambda_3 = a - 1$$
$$\lambda_4 = 1$$
$$\cancel{\lambda_5 =}$$

A^{-1} EXISTIERT FALLS $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ UND $b \in \mathbb{R}$

A HAT DANN VOLLEN RANG $\iff$ A IST INVERTIERBAR $\iff$ $\det(A) \neq 0$ $\iff$ $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ EXISTIERT

BEISPIEL 1 : EIGENWERTE , EIGENVEKTOREN

BERECHNE DIE EIGENWERTE (EW) VON $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

---

1) EW BESTIMMEN : $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$ LÖSEN

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right) \overset{!}{=} 0$$

SARRUS...

$$\Longleftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + \lambda \overset{!}{=} 0$$

← (NULLSTELLEN BESTIMMEN)

$$\Longleftrightarrow \lambda\left(-(1-\lambda)^2 + 1\right) \overset{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 0}} \quad (EW_1)$$

$$\Longleftrightarrow -\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) + 1 \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda \cancel{-1} \cancel{+1} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda(-\lambda + 2) \overset{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \underline{\underline{\lambda_2 = 0}} \quad (EW_2)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\lambda_3 = 2}} \quad (EW_3)$$

WIR BEMERKEN : $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$

DER EW 0 KOMMT ZWEI MAL VOR.

$\Longrightarrow$ SEINE ALGEBRAISCHE MULTIPLIZITÄT (AM) IST GLEICH 2

$\lambda_3 = 2$ KOMMT NUR 1 MAL VOR

$\Longrightarrow$ SEINE ALGEBRAISCHE MULTIPLIZITÄT (AM) IST GLEICH 1

$\Longrightarrow$ UNSERE 3 EIGENWERTE VON A SIND $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$

Definition 7.2.0.16. Algebraische Multiplizität (AM)

Die *algebraische Multiplizität* (auch *algebraische Vielfachheit* genannt) zeigt uns, wie oft λ unter den Nullstellen der charakteristischen Gleichung vorkommt.

BEISPIEL 1.2 : EIGENWERTE , EIGENVEKTOREN

BERECHNE DIE EIGENVEKTOREN (EV) DER ZUGEHÖRIGEN EW VON $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

FÜR ALLE EIGENWERTE BERECHNEN

EIGENVEKTOR ZU λ_i (BELIEBIGER EW) FINDEN : $(A - \lambda_i \cdot I)x = 0$ LÖSEN

↝ EV₁ ZU EW₁ : $\lambda_1 = 0$

$$(A - \lambda_1 I)x \overset{!}{=} 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{III - 2I}{\overset{II + I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_2 , x_3 FREIE VARIABLE : $s, t \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{x} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ t \end{bmatrix}} = \operatorname{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\llcorner EV_1$

DIESEN SPAN NENNT MAN DEN EIGENRAUM ZU λ_1 $(=\lambda_2) = 0$

$$\Longrightarrow E_0 = \operatorname{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

⟶ DIE DIMENSION VON EIGENRAUM IST GLEICH DER GEOMETRISCHEN MULTIPLIZITÄT (GM).

⟹ ALSO GM VON λ_1 IST 2

⟶ DA EW₁ = EW₂ $(\lambda_1 = 0 = \lambda_2)$ HABEN SIE AUCH DEN SELBEN EIGENVEKTOR !

↝ EV₃ ZU EW₃ : $\lambda_3 = 2$

$$(A - \lambda_3 I)x \overset{!}{=} 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{III + 2I}{\overset{II - I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \boxed{\underline{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix}} \longrightarrow \operatorname{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\llcorner EV_3$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$ FREIE VARIABLE

EIGENRAUM ZU $\lambda_3 = 2$:

$$E_2 = \operatorname{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

⟹ GM VON λ_3 IST GLEICH 1

→ HIER NOCHMALS DIE FORMALEN DEFINITIONEN :

Definition 7.2.0.13. Eigenraum

Der *Eigenraum zum Eigenwert* λ ist der lineare Raum, der aus Eigenvektoren zu dem Eigenwert λ besteht:

$$E_\lambda = \operatorname{span}\{\mathbf{x}, \text{ mit } \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}.$$

Definition 7.2.0.17. Geometrische Multiplizität (GM)

Die *geometrische Multiplizität* (auch *geometrische Vielfachheit* genannt) eines Eigenwertes ist die Dimension vom Eigenraum.

Eigenschaften :

Satz 7.2.0.19. Multiplizitätsregel

Für die verschiedenen Multiplizitäten eines Eigenwerts gilt:

$$1 \leq GM \leq AM. \tag{7.2.0.20}$$

Satz 7.2.0.18. Ähnliche Matrizen haben gleiche Eigenwerte

Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom; sie haben also die gleichen Eigenwerte mit den gleichen algebraischen Multiplizitäten.

Satz 7.2.0.11. Lösungen für $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Es gibt für $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nicht-triviale Lösungen ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) dann und nur dann, wenn 0 ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ ist.

→ WARUM ?:)

Satz 7.2.0.23. Verschiedene Eigenwerte haben linear unabhängige Eigenvektoren

Sei $\mathbf{A}$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ Eigenwerte, die sich alle unterscheiden. Dann sind die entsprechenden Eigenvektoren $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k$ linear unabhängig.

$\lambda_1, \ldots \lambda_k$ VERSCHIEDEN $\Longrightarrow$ $s_1, \ldots s_k$ LIN. UNABHÄNGIG.

$\cancel{\Longleftarrow}$ ← BEISPIEL UNTEN

DIAGONALISIEREN (NICHT JEDE MATRIX IST DIAGONALISIERBAR!)

Definition 7.1.0.4. Diagonalisierung

Nehmen wir an, es gibt eine Matrix $\mathbf{S}$, so dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1},$$

wobei $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix ist. Ist diese *Diagonalisierung* möglich, so nennen wir die Matrix $\mathbf{A}$ *diagonalisierbar*.

→ GRANDE, ABER WIE DIAGONALISIEREN WIR JETZT WIRKLICH?

Satz 7.2.0.22. n linear unabhängige Eigenvektoren diagonalisieren eine $n \times n$-Matrix

Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix mit n linear unabhängigen Eigenvektoren, und seien diese Eigenvektoren die Spalten einer Matrix $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \left[\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \cdots\cdots \mathbf{s}_n\right].$$

Dann ist

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{D},$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

1) BILDE DIE MATRIX $\underline{\underline{D}} := \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$ AUS DEN EW

2) BILDE DIE MATRIX $\underline{\underline{S}} := \begin{bmatrix} \underline{EV}_1 & \underline{EV}_2 & \cdots & \underline{EV}_n \end{bmatrix}$ AUS DEN EV

3) BERECHNE $\underline{\underline{S}}^{-1}$

$\Longrightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$

→ BRAVO, UND GEHT DAS IMMER? :)

→ NEIN :/

BEISPIEL 1.3 : DIAGONALISIEREN

„LÄSST SICH A DIAGONALISIEREN?"

BEGRÜNDE. (BERECHNE $S^{-1}DS = A$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

JA, SI, OUI, YES! ABER WARUM?:)

EIGENVEKTOREN (SCHON BERECHNET)

$S := \begin{bmatrix} EV_1 & EV_2 & EV_3 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}}_{D := diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = D = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\longrightarrow \text{ WEIL ALLE ALGEBRAISCHEN MIT DEN JEWEILIGEN GEOMETRISCHEN MULTIPLIZITÄTEN ÜBEREINSTIMMEN :)}}$

$\lambda_1 = 0$: AM VON λ_1 WAR 2 $\hat{=}$ GM VON λ_1 WAR AUCH 2

$\lambda_3 = 2$: AM VON λ_3 WAR 1 $\hat{=}$ GM VON λ_3 WAR AUCH 1

Satz 7.2.0.26. Verhältnis zwischen GM und AM entscheidet ob diagonalisierbar oder nicht

Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ *ein Eigenwert besitzt dessen geometrische Multiplizität strikt kleiner als die algebraische Multiplizität ist, dann ist die Matrix nicht diagonalisierbar.*
Wenn für alle Eigenwerte die geometrische Multiplizität gleich der algebraischer Multiplizität ist, dann ist die Matrix diagonalisierbar.

!

↳ NUR DANN :)

SYMMETRISCHE MATRIZEN $A^T = A$ (BZW. $A^H = A$)

ZUERST NORMALE MATRIZEN :

Definition 7.3.0.3. Normale Matrix

Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$) heisst *normal*, wenn $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ (bzw. $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^H$) erfüllt ist.

→ ABER : ALLE SYMMETRISCHEN MATRIZEN SIND NORMALE MATRIZEN ! (ZEIGE DAS ALS ÜBUNG :)

Satz 7.3.0.1. Symmetrische Matrizen haben reele Eigenwerte und orthgonale Eigenvektoren

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (bzw. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$) eine symmetrische (bzw. Hermite-symmetrische) Matrix. Dann sind alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ reell und alle Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind orthogonal.

→ BEWEIS IN SKRIPT

SYMMETRISCH $\Longrightarrow$ NORMAL

Satz 7.3.0.5.
Normale Matrizen sind die durch orthogonale Transformationen diagonalisierbaren Matrizen

$\mathbf{A}$ hat n orthogonale Eigenvektoren dann und nur dann wenn $\mathbf{A}$ normal ist.

Satz 7.3.0.6. Spektralsatz

Jede symmetrische Matrix lässt sich durch orthogonale Transformationen diagonalisieren.

$\Longleftrightarrow$ ANDERST GESAGT :

FALLS $A^{n\times n}$ SYMMETRISCH / HERMITE-SYMMETRISCH IST EXISTIERT $\boxed{A = UDU^H}$

MIT EINER ORTHOGONALER / UNITÄREM MATRIX U

UND DER DIAGONALMATRIX $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ALLES REELE EIGENWERTE!)

GUT FÜR SERIE 10 :)

Satz 7.4.0.5. Eigenwerte einer s.p.d. Matrix

Die symmetrische Matrix $\mathbf{A}$ ist positiv-definit dann und nur dann, wenn alle ihre Eigenwerte strikt positiv sind.

ANWENDUNGEN :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$A^k = (SDS^{-1})^k = \underbrace{(SDS^{-1})\underbrace{(SDS^{-1})}_{=I}\underbrace{(SDS^{-1})}_{=I}(SDS^{-1}) \dots (SDS^{-1})}_{k\text{-MAL}}$$

$$= S D^k S^{-1}$$

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1 & & & & 0 \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & d_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & & & 0 \\ & d_2^k & & & \\ & & d_3^k & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & d_n^k \end{bmatrix}$$

ANALOG ZU $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(SDS^{-1})^n t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{SD^nS^{-1} t^n}{n!}$$

$$= \underbrace{S\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n t^n}{n!}\right]S^{-1}} = S \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & & 0 \\ & e^{d_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{d_n t} \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n t^n}{n!} = I + tD + \frac{t^2}{2} D^2 + \frac{t^3}{3!} D^3 + \dots + \frac{t^n}{n!} D^n$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_1^n}{n!} t^n & & & 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_2^n}{n!} t^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n^n}{n!} t^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & & 0 \\ & e^{d_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{d_n t} \end{bmatrix}$$

ANWENDUNG: ODE 1. ORDNUNG

LÖSE FOLGENDES ENTKOPPELTES SYSTEM LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG :

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = a_1 u_1(t) \\ \dot{u}_2(t) = a_2 u_2(t) \end{cases}$$

MIT $u(0) = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}$ (ANFANGSBEDINGUNGEN)

DURCH EINSETZEN SIEHT MAN, DASS FOLGENDES EINE LÖSUNG IST:

$$\underline{\underline{\begin{aligned} u_1(t) &= e^{a_1 t} u_1(0) \\ u_2(t) &= e^{a_2 t} u_2(0) \end{aligned}}}$$

ABER WARUM? :

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = a_1 u_1(t) \\ \dot{u}_2(t) = a_2 u_2(t) \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}}_{:= \dot{u}(t)} = \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}}_{:= A}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}}_{:= u(t)}$$

$$\implies \dot{u}(t) = A u(t)$$

$$\iff u(t) = \boxed{e^{At}} u(0)$$

DA A EINE DIAGONALMATRIX IST $\implies e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n t} \end{bmatrix}$

$$\iff u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\iff \underline{\underline{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} u_1(0) \\ e^{a_2 t} u_2(0) \end{bmatrix}}}$$

ERGÄNZUNG...

EIGENSCHAFTEN : MATRIX EXPONENTIAL

Satz 3.27 Rechenregeln des *Matrix-Exponentials*
Seien $n, p \in \mathbb{N}^+$, $A \in \mathbb{M}(n,n,\mathbb{R})$ und $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt folgendes.

(a) $e^{a\cdot A} \cdot e^{b\cdot A} = e^{(a+b)\cdot A}$

(b) $\left(e^A\right)^p = e^{p\cdot A}$

(c) $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$

(d) $\left(e^A\right)^T = e^{A^T}$

→ ZIEMLICH INTUITIV FÜR DIE MEISTEN REGELN, ABER ACHTUNG...

Satz 3.26 *Determinante* eines *Matrix-Exponentials*
Seien $n \in \mathbb{N}^+$ und $A \in \mathbb{M}(n,n,\mathbb{R})$, dann gilt

$$\boxed{\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{tr}(A)} > 0.} \tag{3.225}$$

iv) Das *Matrix-Exponential* einer *spurlosen Matrix* ist offensichtlich *unimodular*, denn

$$\operatorname{tr}(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{\det\left(e^A\right)}} = e^{\operatorname{tr}(A)} = e^0 = \underline{\underline{1.}} \tag{3.226}$$

ACHTUNG: GILT IM ALLGEMEINEN NICHT FÜR ALLE MATRIZEN :)

Satz 3.28 Spezielle Rechenregel des *Matrix-Exponentials*
Seien $n \in \mathbb{N}^+$ und $A, B \in \mathbb{M}(n,n,\mathbb{R})$ *kommutierend*, d.h.

$$[A, B] = 0, \tag{3.227}$$

dann gilt

$$\boxed{e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A.} \tag{3.228}$$

Die *Matrix-Exponentiale* von *ähnlichen Matrizen* sind ebenfalls *ähnlich*.