RECAP – W11

EIGENWERTE EW

&

EIGENVEKTORE EV

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

1) EW BESTIMMEN : $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$ LÖSEN

ALGEBRAISCHE VIELFACHHEIT (0) = 2

ALGEBRAISCHE VIELFACHHEIT (2) = 1

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2$

FÜR ALLE EIGENWERTE BERECHNEN

(BELIEBIGER EW)

EIGENVEKTOR ZU λ_i FINDEN : $(A - \lambda_i I)x = 0$ LÖSEN

GEOMETRISCHE VIELFACHHEIT (0) = 2

GEOMETRISCHE VIELFACHHEIT (2) = 1

$$\underline{\underline{x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ t \end{bmatrix}}} = \underline{\underline{\text{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$$\underline{\underline{y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix}}} \Longrightarrow \underline{\underline{\text{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

HIER DIAGONALISIERBAR WEIL ALLE ALGEBRAISCHEN MIT DEN JEWEILIGEN GEOMETRISCHEN MULTIPLIZITÄTEN ÜBEREINSTIMMEN :)

$Am(\lambda_i) = Gm(\lambda_i)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{S}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{S^{-1}}}$$

KONSISTENT !

SPEKTRALSATZ : FALLS $A^{n \times n}$ SYMMETRISCH / HERMITE-SYMMETRISCH IST EXISTIERT $\boxed{A = UDU^H}$

MIT EINER ORTHOGONALER / UNITÄREN MATRIX U

UND DER DIAGONALMATRIX $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ALLES REELLE EIGENWERTE!)

→ DIE EV BEZÜGLICH VERSCHIEDENER EW STEHEN AUFGRUND DER SYMMETRIE BEREITS ORTHOGONAL ZUEINANDER. (WAS DEN SPALTEN VON S ENTSPRICHT)

⟹ FALLS IHR DIE EV ALSO NOCH NORMIERT, HABT IHR S GERADE ORTHOGONAL GEBILDET, WOMIT $S = U$ BZW. $S^{-1} = U^T$

MATRIXPOTENZ $\underline{A}^k = SD^kS^{-1}$

&

MATRIXEXPONENTIAL

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & 0 \\ & e^{d_2 t} & \\ 0 & & e^{d_3 t} \end{bmatrix} S^{-1}$$

WIRD BENUTZT UM ODE'S ZU LÖSEN

DETAILLIERTERE HERLEITUNG ...

THEORIE

$\boxed{\text{Als} \quad \dot{u} = Au} \iff \dot{u} = (SDS^{-1})u$

$\iff S^{-1}\dot{u} = DS^{-1}u$

SUBSTITUTION: $v := S^{-1}u$

$\iff u = Sv$

$\iff \dot{v}(t) = D\,v(t)$

BSP 1)

$\implies v(t) = e^{Dt}\,v(0)$

RÜCKSUBST.

$\iff S^{-1}u(t) = e^{Dt}\,S^{-1}u(0)$

Th

$\iff u(t) = \underbrace{S\,e^{Dt}\,S^{-1}}_{=e^{At}}\,u(0)$

DAMIT WIR S^{-1} NICHT EXPLIZIT BERECHNEN MÜSSEN FORMEN WIR WEITER UM...

$\iff u(t) = S\cdot e^{Dt}\cdot \boxed{v(0)}$

$$= \begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{array}\right] \\ S^{(1)} \quad S^{(2)} \quad S^{(3)} \end{array} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{array}\right] \\ S^{(1)} \quad S^{(2)} \quad S^{(3)} \end{array} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} c_1 \\ e^{\lambda_2 t} c_2 \\ e^{\lambda_3 t} c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{11} e^{\lambda_1 t} c_1 + S_{12} e^{\lambda_2 t} c_2 + S_{13} e^{\lambda_3 t} c_3 \\ S_{21} e^{\lambda_1 t} c_1 + S_{22} e^{\lambda_2 t} c_2 + S_{23} e^{\lambda_3 t} c_3 \\ S_{31} e^{\lambda_1 t} c_1 + S_{32} e^{\lambda_2 t} c_2 + S_{33} e^{\lambda_3 t} c_3 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \boxed{S^{(1)} e^{\lambda_1 t}\cdot c_1 + S^{(2)} e^{\lambda_2 t}\cdot c_2 + S^{(3)} e^{\lambda_3 t}\cdot c_3} \quad \dots$$

EIGENVEKTOREN $S^{(i)}$ VON A ZU ZUGEHÖRIGEM EIGENWERT λ_i

EIGENWERTE λ_i VON A

BESTIMME $v(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

DURCH LÖSEN VON $S\,v(0) = u(0)$

→ BEISPIEL FOLGT :)

ANWENDUNG · ODE 1. ORDNUNG : BSP 2

LÖSE FOLGENDES GEKOPPELTES SYSTEM LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG :

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) = 6u_1(t) + 2u_2(t) \\ u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} \end{cases}$$

(ANFANGSBEDINGUNGEN)

---

1) MATRIXFORM :

$$\dot{\underline{u}}(t) = \underline{A}\,\underline{u}(t) \iff \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}}_{:=\dot{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}}_{:=u}$$

THEORIE

ALS $\dot{u} = Au \iff \dot{u} = (SDS^{-1})\,u$

$$\iff S^{-1}\dot{u} = DS^{-1}u$$

SUBSTITUTION : $v := S^{-1}u$

$\iff u = Sv$

$$\iff \dot{v}(t) = D\,v(t)$$

$$\overset{\text{BSP 1}}{\Longrightarrow} v(t) = e^{Dt}\,v(0)$$

$$\overset{\text{RÜCKSUBST.}}{\iff} S^{-1}u(t) = e^{Dt}\,S^{-1}u(0)$$

$$\overset{\text{TR}}{\iff} u(t) = \underbrace{S\,e^{Dt}\,S^{-1}}_{= e^{At}}\,u(0)$$

2) EIGENWERTE BERECHNEN :

$$\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \iff \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\iff (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 \overset{!}{=} 0$$

$$\iff \lambda^2 - 3\lambda - 4 \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 4 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

2) EIGENVEKTOREN BERECHNEN:

EV_1 zu $\lambda_1 = 4$:

$$(A - \overset{\lambda_1}{4}I)\,x \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II + 2I} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

RÜCKWÄRTSEINSETZEN $\Longrightarrow$ $x_2 = t$, $x_1 = \frac{1}{3}t$ $\Longrightarrow$ $\underline{E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}}$

EV_2 zu $\lambda_2 = -1$:

$$(A + \overset{\lambda_2}{1}I)\,x \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II - 3I} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

RÜCKWÄRTSEINSETZEN $\Longrightarrow$ $x_2 = t$, $x_1 = \frac{-1}{2}t$ $\Longrightarrow$ $\underline{E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}}$

$$\Longrightarrow \quad \underline{S = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} s^{(1)} & s^{(2)} \end{array} \end{array}}$$

$$u(t) = C_1 \cdot e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3)

$$\boxed{u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} s^{(1)} + C_2 e^{\lambda_2 t} s^{(2)}}$$

$$u = Sv \Longleftrightarrow u(0) = S\,v(0) \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

MIT GAUSS: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 10 \end{array}\right] \Longrightarrow \underline{\underline{C_1 = 2, \quad C_2 = -2}}$

$$\longrightarrow \quad \underline{\underline{u(t) = 2e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

4) ZUSATZ: $u(0) = \,?$ DAMIT $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$

DAMIT $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$ MUSS $c_1 \overset{!}{=} 0$ SEIN

DA $\lim\limits_{t \to \infty} c_1 e^{4t} = \pm\infty$ UND $\lim\limits_{t \to \infty} c_2 e^{-t} = 0$

$$\longrightarrow \quad v(0) \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\longrightarrow \quad \underline{\underline{u(0) = S\, v(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix}}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

DEFINITHEIT VON MATRIZEN (QUADRATISCH)

SEI $\underline{A}^{n \times n}$ EINE QUADRATISCHE MATRIX UND $x \neq 0$ EIN n-ZEILIGER SPALTENVEKTOR, SO HEISST DIE MATRIX $\underline{A}$:

POSITIV DEFINIT	FALLS	$x^T A x > 0$
POSITIV SEMIDEFINIT	FALLS	$x^T A x \geq 0$
NEGATIV DEFINIT	FALLS	$x^T A x < 0$
NEGATIV SEMIDEFINIT	FALLS	$x^T A x \leq 0$

→ FALLS A SYMMETRISCH IST, GENÜGT ES IHRE EIGENWERTE ZU ÜBERPRÜFEN:

Satz 7.4.0.5. Eigenwerte einer s.p.d. Matrix

Die symmetrische Matrix **A** *ist positiv-definit dann und nur dann, wenn alle ihre Eigenwerte strikt positiv sind.*

Bemerkung 7.4.0.6 (S.p.d.-Test via Pivoten.)
Wenn die Gauss-Elimination einer symmetrischen $n \times n$-Matrix n (strikt) positiver Pivoten hat, dann ist die Matrix positiv definit.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

→ NICHT IM SKRIPT (?) ABER DER VOLLSTÄNDIGKEITS HALBER:

Eigenwerte [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Eine quadratische symmetrische (bzw. hermitesche) Matrix ist genau dann

positiv definit,	wenn alle Eigenwerte größer als null sind;
positiv semidefinit,	wenn alle Eigenwerte größer oder gleich null sind;
negativ definit,	wenn alle Eigenwerte kleiner als null sind;
negativ semidefinit,	wenn alle Eigenwerte kleiner oder gleich null sind und
indefinit,	wenn positive und negative Eigenwerte existieren.

DIE QUADRATISCHE FORM (p. 174 SKRIPT)

SEI $A^{n\times n}$ EINE s.p.d. MATRIX, ZB: $A^{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ MIT $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

SO IST DIE "QUADRATISCHE FORM": $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

ALSO HIER: $\boxed{f(x_1, x_2) = x^T A x = a x_1^2 + 2 \cdot b x_1 x_2 + c x_2^2}$

FALLS A s.p.d. GILT $f(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$= 0 \qquad x_1 = x_2 = 0$

$\hookrightarrow$ ANALOG IST $x^T A x$ AUCH FÜR HÖHERE DIMENSIONEN DEFINIERT :)

BEISPIEL 1

SEI $x^T A^{3\times 3} x = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3)$

WIE LAUTET DIE SYMMETRISCHE MATRIX $A^{3\times 3}$ MIT DIESER QUADRATISCHEN FORM?

A IST SYMMETRISCH, ALSO $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ UND $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

ALSO ALLGEMEIN: $x^T A x = a x_1^2 + d x_2^2 + f x_3^2 + 2b x_1x_2 + 2c\, x_1x_3 + 2\cdot e\cdot x_2x_3$

$\leadsto$ KOEFFIZIENTENVGL. MIT $G(x) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3)$

$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

$$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ZUSATZ: DA A SYMMETRISCH IST:

A s.p.d. $\Longleftrightarrow \lambda_i > 0 \ \forall i$

$\Longleftrightarrow$ ALLE EW STRIKT POSITIV

ODER ALLE PIVOTE NACH GAUSSEN > 0 SIND. (7.4.0.6)

Beispiel 2 : Ellipse

Bestimme die beiden Halbachsen der Ellipse, die entsteht, wenn wir die quadratische Form von A mit $x_3 = 1$ schneiden.

$$x^T A x = Q(x) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$$

$$x^T A x = Q(x) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 \overset{!}{=} 1$$

Bemerkung: Als der quadratischen Form können wir mittels Koeff vgl. A bestimmen (Serie 11.3) (vgl. Beispiel 1 Hälfte)

0) Matrix A bestimmen

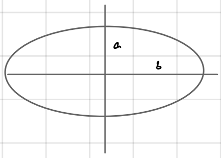
Koeffizienten vergleich. $\Longrightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

1) Eigenwerte von A bestimmen

$$\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \iff \lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 1$$

Die Längen der Halbachsen sind:

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = 1}$$



Satz 7.4.0.10. Ellipse

Sei die Matrix $\mathbf{A}$ *diagonalisierbar als* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^T$ *und s.p.d.*
Dann beschreibt $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 1$ *eine Ellipse. In ausgeschriebener Form nimmt die Ellipse die Gestalt*

$$1 = [x_1 \;\; x_2]\mathbf{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

an.
Die Längen der Halbachsen dieser Ellipse sind dementsprechend $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$.

BEISPIEL 2.2 FORTSETZUNG

SKIZZIERE DIE ELLIPSE VON OBEN.

---

2) ZUGEHÖRIGE EV BESTIMMEN

UND NORMIEREN $\left(\frac{v_i}{\|v_i\|}\right)$

↳ (DANN IST S ORTHOGONAL)

$\Longrightarrow S^{-1} = S^T$

$(A - \lambda_i I)\,\underline{x} = 0$ NACH $\underline{x}$ GAUSSEN / LÖSEN

LÖSEN:

$\Longrightarrow$ ZB:

$EV_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$EV_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

NORMIERTE EV

$$\Longrightarrow A = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}_{U^T = U^{-1}}$$

3) HIER WECHSELN WIR DAS KOORDINATENSYSTEM MIT EINER SUBSTITUTION

SUBSTITUTION: $\quad v := U^{-1} x = U^T x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$

4) EINSETZEN IN URSPRÜNGLICHE QUADRATISCHE FORM / GL:

$$\Longrightarrow 1 = x^T A x = x^T U D U^T x = v^T D v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$= 9 v_1^2 + v_2^2$$

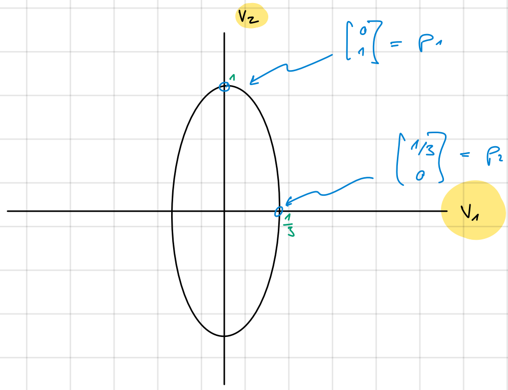
$$= \frac{v_1^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{v_2^2}{(1)^2} = 1$$

BEMERKUNG: LÄNGE DER HALBACHSEN HÄTTE HIER AUCH MIT KOEFFUGL. BESTIMMT WERDEN KÖNNEN.

Jede Ellipse lässt sich in einem geeigneten Koordinatensystem durch eine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{v_1^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{v_2^2}{(1)^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow$$



$\rightsquigarrow$ ABER WIR "WOLLEN" DIE ELLIPSE JA IN DEN X-KOORDINATEN ZEICHNEN ...

$\Longrightarrow$ RÜCKSUBSTITUTION

$v := U^T x \iff x_i = U v_i$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{p}_1 = U \cdot p_1 = \underline{\underline{\frac{1}{3\cdot\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{p}_2 = U \, p_2 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$