SVD : Singulärwert Zerlegung

Satz 8.1.0.1. Singulärwertzerlegung (Singular Value Decomposition/SVD)

Sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *beliebig. Es gibt zwei orthogonale Matrizen* $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *und* $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *sodass:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}, \qquad (8.1.0.2)$$

wobei die Matrix $\mathbf{\Sigma} = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(p = \min(m,n))$ *die Singulärwerte der Matrix* $\mathbf{A}$ *auffasst. Die Singulärwerte stehen auf der Hauptdiagonale von* $\mathbf{\Sigma}$ *und sind der Grösse nach absteigend geordnet:* σ_1 *ist der grösste und* σ_p *ist der kleinste Singulärwert:*

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_p \geq 0\,. \qquad (8.1.0.3)$$

- $A = U\Sigma V^T \iff A^T = V\Sigma^T U^T$ (wird oft angewendet falls $n > m$)
  - → Beispiel weiter unten!

(Falls A invertierbar, so ist $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$)

→ $A^{m\times n}$ muss hier nicht mehr quadratisch sein

↳ A muss nicht mehr diagonalisierbar sein

→ $V^{n\times n}$ ist orthogonal

besteht aus den (normierten) Eigenvektoren von A^TA

→ $\Sigma^{m\times n}$ hat dieselben Dimensionen wie die Matrix A

→ besteht aus den Singulärwerten auf der Hauptdiagonale (sonst alles 0)

→ Singulärwert: $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$ (EW $\lambda = 0$ wird nicht berücksichtigt)

→ $U^{m\times m}$ ist orthogonal ($\iff U^H U = I$)

↳ Die Spalten berechnen sich: $u_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot A \cdot v_i = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$

↳ Spalte für Spalte berechnen ...

KOCHREZEPT : SVD

(*)

1) BERECHNE A^TA ← IST DEFIT SYMMETRISCH POSITIV SEMI-DEF. UND REELL
↳ ORTHOGONALE EV

2) BERECHNE EW$^{(1)}$ UND EV$^{(2)}$ VON A^TA

(1) : $\det(A^TA - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \iff \lambda_1 = \_\_\_ ; \dots ; \lambda_n = \_\_\_$

(2) : $(A^TA - \lambda_i I)x = 0 \iff \underline{v}_1 = [\ ] ; \dots ; \underline{v}_n = [\ ]$

↳ NORMIERE ALLE EV $\Longrightarrow$ V ORTHOGONAL

2.1) BILDE $\underline{\underline{V}}^{n \times n}$ ALS EV (NORMIERT) $\Longrightarrow \underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1, & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

2.2) BILDE V^T ($= V^{-1}$, DA V ORTHOGONAL)

3) BERECHNE SINGULÄRWERTE σ_i

↳ $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$ (SORTIEREN : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots$)

3.1) BILDE $\Sigma^{m \times n}$ → $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$

4) BERECHNE ALLE SPALTEN VON $U^{m \times m}$

↳ $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i = [\ ]$

↳ ERGÄNZE ZU ONB ENTSPRECHEND DIMENSIONEN (KREUZPRODUKT, GRAM-SCHMIDT, ...)

↝ EIGENTLICH SIND u_i EIGENVEKTOREN VON AA^T

4.1) BILDE $U^{m \times m}$ ← $U^{m \times m} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1, & u_2 & \cdots & u_3 \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

(*) : FALLS $A^{m \times n}$ MIT $\underline{n \gg m}$ LOHNT ES SICH (VON HAND) ZUERST DIE SUBSTITUTION $A_1 := A^T$ ZU MACHEN, UND DIE SVD VON $A_1 = U_1 \Sigma_1 V_1^T$ ZU BERECHNEN.

DIE SVD VON A IST DANN $A = V_1 \Sigma_1^T U_1^T$

BEISPIEL 1 : SVD

BERECHNE DIE SVD VON $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = U \Sigma V^T$

---

1) $A^T A = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ SYMMETRISCH λ REELL $\Longrightarrow$ ORTHOGONALE EV.

2) EIGENWERTE : $\det(A^T A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0 \iff \det \begin{pmatrix} 10-\lambda & 20 \\ 20 & 40-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$

$\iff \lambda_1 = 50$
$\lambda_2 = 0$

EIGENVEKTOR (NORMIERT) ZU $\lambda_1 = 50$:

$(A^T A - \lambda_1 I) x = 0 \iff \left[\begin{array}{cc|c} 10-50 & 20 & 0 \\ 20 & 40-50 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} -40 & 20 & 0 \\ 20 & -10 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} -40 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\longrightarrow E_{50} = \text{SPAN}\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow \underline{v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$

$(A^T A - \lambda_2 I) x = 0 \iff \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 20 & 0 \\ 20 & 40 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow E_0 = \text{SPAN}\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow \underline{v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$\longrightarrow V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{V^{-1} = V^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}$

3) $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{50} > 0$ (DAS IST DER EINZIGE SINGULÄRWERT, > 0)

$\longrightarrow \underline{\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{50} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$ $\leftarrow$ Σ HAT DIE SELBEN DIMENSIONEN, WIE A.

4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow$ JETZT BRAUCHEN WIR NOCH EINEN ORTHOGONALEN VEKTOR ZU u_1 : (VERSCHIEDENE VARIANTEN)

WIR SEHEN : $u_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$ IST ORTHOGONAL ZU u_1 $(\langle u_1, u_2 \rangle = 0)$

$\longrightarrow \underline{U = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}$

BEISPIEL 2 : BERECHNE DIE SVD VON $A = [2 \quad 2 \quad 1]$

(*) DA $n = 3 > 1 = m$ IST, SUBSTITUIEREN WIR ZUERST $A_1 := A^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

1) $A_1^T A_1 = [9]$

2) · $\det(A_1^T A_1 - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \iff \lambda_1 = 9$

· $(A_1^T A - \lambda_1 I)x = 0 \iff$ $E_9 = \text{span}\{[s], s \in \mathbb{R}\}$

$\Longrightarrow v_1 = [1]$

NORMIERT !

$\Longrightarrow \underline{\underline{V_1^T = [1]}}$

3) $\underline{\underline{\sigma_1}} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}} > 0$

$\Longrightarrow \underline{\underline{\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$ SELBE DIMENSIONEN WIE A_1

4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A_1 v_1$

$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1] = \underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

DIE MATRIX U_1 SOLL ABER 3x3 SEIN!

HIER WIRDS ETWAS TRICKY ... DIE MATRIX U SOLL JA ORTHOGONAL SEIN : ALSO KÖNNEN WIR EINEN VEKTOR u_2 INTELLIGENT RATEN, UND DANACH DAS KREUZPRODUKT VON $u_1 \times u_2 = u_3$ AUSNUTZEN $(u_1 \perp u_2 \perp u_3)$.

WIR SEHEN : $\tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ BZW $\underline{\underline{u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}} \Longrightarrow \langle u_1 ; u_2 \rangle = 0$

SOMIT IST $u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ BZW $\underline{\underline{u_3 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}}}$

$\longrightarrow$ SOMIT IST $A_1 = U_1 \Sigma_1 V_1^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [1]$

$\Longrightarrow$ SOMIT IST $\underline{\underline{A}} = V_1 \Sigma_1^T U_1^T = \underline{\underline{[1] \cdot [3 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}}}$

EIGENSCHAFTEN DER SVD :

Satz 8.1.0.4. Fundamentalsatz der linearen Algebra - Teil II.

Mit den Notationen aus der Singulärwertzerlegung gilt:

1. $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ *ist eine Orthonormalbasis vom Kern von* $\mathbf{A}$;
2. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ *spannen das Bild von* $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ *und heissen rechte Singulärvektoren von* $\mathbf{A}$;
3. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ *spannen das Bild von* $\mathbf{A}$ *und heissen linke Singulärvektoren von* $\mathbf{A}$;
4. $$\mathbf{u}_1^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \sigma_1\,, \quad \mathbf{u}_2^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \sigma_2\,, \ldots, \mathbf{u}_r^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}_r = \sigma_r\,;$$
5. $$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \sigma_1\mathbf{u}_1 \\ \vdots \qquad &\qquad \vdots \\ \mathbf{u}_r = \frac{1}{\sigma_r}\mathbf{A}\mathbf{v}_r \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_r = \sigma_r\mathbf{u}_r \\ &\quad\ \ \mathbf{A}\mathbf{v}_{r+1} = 0 \\ &\qquad \vdots \\ &\quad\ \ \mathbf{A}\mathbf{v}_n = 0\,. \end{aligned}$$

! BASISPRÜFUNG_W20

→ SEI ALSO UNSERE SVD : ("ABLESEN")

$$A = U\Sigma V^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

→ DIM(A) = DIM(Σ) = $\underline{4 \times 3}$

→ RANG(A) = # SINGULÄRWERTE > 0 $\Longrightarrow$ RANG$(A) = \underline{2}$

→ 2-NORM(A) = GRÖSSTER SINGULÄRWERT $= \sigma_1 = \underline{2}$ (SPÄTER MEHR DAZU)

= SPEKTRAL NORM (A)

→ BILD(A) = $\underline{\text{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}}$

→ KERN(A) = $\underline{\text{SPAN}\left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}}$

"SCHREIBE DIE MATRIX A ALS SUMME VON RANG 1 MATRIZEN".

$$A = U\Sigma V^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

SERIE 12.4 → TRY IT :)

$\longrightarrow$ $A = \sigma_1 \cdot u_1$ (SPALTE) $\cdot\, v_1^T$ (ZEILE) $+ \; \sigma_2 \cdot u_2$ (SPALTE) $\cdot\, v_2^T$ (ZEILE) $+ \dots$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 0$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}}}$$

ANWENDUNGEN SVD :

- AUSGLEICHSRECHNUNG : (IMMER STABILE ERGEBNISSE) MIT RANG$(A) = r < n$

$$A = U \Sigma V^T$$

$$= \begin{bmatrix} U_r & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$$

ENTHÄLT DIE ERSTEN r ZEILEN

ENTHÄLT DIE ERSTEN r SPALTEN

⤳ HERLEITUNG IM SKRIPT p. 196

$\Longrightarrow$ LÖSE $\Sigma_r V_r^T x = U_r^T b$ NACH x AUF

$\Longrightarrow$ ALSO BERECHNE $\boxed{x = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T b}$ (BEISPIEL FOLGT)

- **Definition 8.2.2.1. Pseudoinverse nach Moore (1920) und Penrose (1955)**

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gegeben und sei $\mathbf{U\Sigma V}^\top$ ihre Singulärwertzerlegung.
Die *Pseudoinverse (Moore-Penrose)* ist dann definiert als:

ODER T

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V\Sigma}^\dagger\mathbf{U}^H ,$$

mit der $n \times m$ Diagonalmatrix:

$$\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-1} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \sigma_r^{-1} & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

↳ DIESE PSEUDOINVERSE EXISTIERT AUCH FÜR A SINGULÄR ODER NICHT-QUADRATISCH

SEI ZB : $Ax = b$ NICHT LÖSBAR . $\Longrightarrow$ $\bar{x} = A^+ b$ WOBEI $\bar{x}$ DIE LÖSUNG (APPROXIMATION) MIT DER KLEINSTEN EUKLIDISCHEN NORM $\|Ax - b\|_2$ IST.

Definition 8.2.3.2. Wichtige Matrizennormen

Sei $\mathbf{A}$ eine $m \times n$ Matrix.
Die *euklidische Norm* oder (wie gerade bewiesen) auch *Spektralnorm* ist

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sigma_1 \,.$$

BASISPRÜFUNG → BEISPIEL :)

Die *Frobenius Norm* ist

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |A_{i,j}|^2} = \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_r^2} \,.$$

Die *Nuklearnorm* ist

$$\|\mathbf{A}\|_N = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_r \,.$$

(→ HERLEITUNG IM SKRIPT p. 198 ...)

· KONDITIONSZAHL :

Definition 6.4 *Konditionszahl*
Seien $m, n, r \in \mathbb{N}^+$ mit $r = \min(m, n)$ und $A \in \mathbb{M}(m, n, \mathbb{R})$ mit *Singulärwerten* $\mathrm{sing}(A) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$, dann ist die *Konditionszahl* von A die *strikt positive reelle Zahl*

$$\boxed{\mathrm{cond}(A) := \frac{\sigma_1}{\sigma_r}\,.} \tag{6.33}$$

→ PRAKTISCHE ANWENDUNG : DEMO :) (DATENKOMPRESSION)

(!) PRÜFUNG_W20

→ BASISPRÜFUNG (NOCHMALS KOMPAKT)

3. [6 Punkte] Sei die Matrix A gegeben durch ihre Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Was sind die Dimensionen, der Rang und die 2-Norm der Matrix A?

b) Schreiben Sie A als Summe von Rang-1-Matrizen.

c) Geben Sie orthonormale Basen von Kern(A) und Bild(A) an.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) → DIM (A) = DIM (Σ) = $\underline{4 \times 3}$

→ RANG (A) = # SINGULÄRWERTE > 0 ⟹ RANG (A) = $\underline{2}$

→ 2-NORM (A) = GRÖSSTER SINGULÄRWERT = σ_1 = $\underline{2}$

b) → $A = \sigma_1 \cdot u_1$ (SPALTE) $\cdot\, v_1^T$ (ZEILE) $+\ \sigma_2 \cdot u_2$ (SPALTE) $\cdot\, v_2^T$ (ZEILE) $+ \dots$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 0$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

c) → BILD (A) = $\operatorname{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$

→ KERN (A) = $\operatorname{SPAN}\left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

3. [6 Punkte] Sei die Matrix A gegeben durch ihre Singularwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$U_r \qquad \Sigma_r \qquad V_r^T$

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Was sind die Dimensionen, der Rang und die 2-Norm der Matrix A?

b) Schreiben Sie A als Summe von Rang-1-Matrizen.

c) Geben Sie orthonormale Basen von Kern(A) und Bild(A) an.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

d) $\Longrightarrow$ ALSO BERECHNE $x = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T b$

MIT $\Sigma_r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Sigma_r^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$V_r^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow V_r = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$U_r = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow U_r^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{x}} = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}}}$$