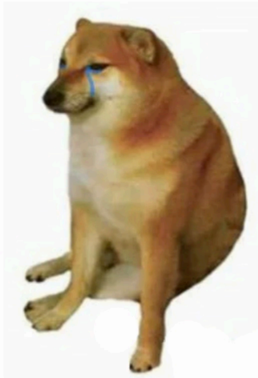
RECAP_W13

SINGULÄRWERT-ZERLEGUNG
(SVD)

SVD



$A^TA \leftarrow A^{m\times n}$

A^TA:
- SYMMETRISCH
- POSITIV-SEMI-DEFINIT
- $n \times n$

A: BELIEBIG

$\det(A^TA - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$ – EIGENWERTE

$(A^TA - \lambda_i I)x = 0$ – NORMIERTE EIGENVEKTOREN

$V^{n\times n}$

ORTHONORMALE EV VON A^TA

→ SPALTEN VON V.

$\sigma_i := \sqrt{\lambda_i} > 0$

$\lambda_i :=$ EIGENWERTE VON A^TA

$\Sigma^{m\times n}$

DIAG $(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_r)$ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r > 0$

RANG(A)

$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$ ⟹ AUF ONB ERGÄNZEN (FALLS NÖTIG)

ODER u_i = ORTHONORMALE EIGENVEKTOREN VON AA^T. (LANGER WEG)

$U^{m\times m}$

$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1, & u_2 & \dots & u_3 \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

ORTHOGONAL

$$\boxed{A = U \cdot \Sigma\, V^T}$$

7.5.1 Schur-Zerlegung

Satz 7.5.1.1. Schur-Zerlegung

1. *Die »komplexe« Schur-Zerlegung.*
   Sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gegeben. Es existiert eine unitäre Matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sodass

   $$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$$

   erfüllt ist (mit $\mathbf{T}$ als obere Dreiecksmatrix). So gilt auch

   $$\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{T}\,.$$

   Die Einträge in der Hauptdiagonale von $\mathbf{T}$ sind die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.
2. *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig. Es gibt eine orthogonale Matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass*

   $$\mathbf{U}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \cdots & \mathbf{R}_{1m} \\ \underline{0} & \mathbf{R}_{22} & \cdots & \mathbf{R}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \mathbf{R}_{mm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

   eine obere Blockdreiecksmatrix ist, mit $\mathbf{R}_{ii}$ als eine 1×1 bzw. 2×2-Matrix.
   Wenn $\mathbf{R}_{jj} = \lambda_j$ ist, dann ist λ_j Eigenwert von $\mathbf{A}$. Wenn $\mathbf{R}_{jj}$ eine 2×2-Matrix ist, dann sind ihre Eigenwerte λ_j, $\overline{\lambda_j}$ Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

BASICALLY : DIE MATRIX A IST JETZT NICHT MEHR DIAGONALISIERBAR :(

DA $AM(\lambda_i) \neq GM(\lambda_i)$ FÜR MINDESTENS EIN i.

Beispiel 2

Berechne die Schur-Zerlegung der Matrix $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{bmatrix}$. Tipp $\lambda_1 = 2$.

1) EW berechnen: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -7 & 2 & 7-\lambda \end{bmatrix} \right) \overset{!}{=} 0$$

$$(-2-\lambda)(1-\lambda)(7-\lambda) + 7 + 12 - (-7)(1-\lambda)\cdot 3 + 2\cdot(-2-\lambda) - (7-\lambda)\cdot 2 \overset{!}{=} 0$$

$$(-2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2)(7-\lambda) + 19 - (-21 + 21\lambda) - 4 - 2\lambda - 14 + 2\lambda \overset{!}{=} 0$$

$$-14 + 2\lambda + 14\lambda - 2\lambda^2 - 7\lambda + \lambda^2 + 7\lambda^2 - \lambda^3 + 19 + 21 - 21\lambda - 18 \overset{!}{=} 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \overset{!}{=} 0$$

Tipp: $\lambda_1 = 2$ (Polynomdivision):

$$(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8) : (\lambda - 2) = -\lambda^2 + 4\lambda - 4$$

$$\begin{array}{l} -(-\lambda^3 + 2\lambda^2) \\ \hline \quad 4\lambda^2 - 12\lambda + 8 \\ \quad -(4\lambda^2 - 8\lambda) \\ \hline \qquad -4\lambda + 8 \\ \qquad -(-4\lambda + 8) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = 2}}$

Mitternachtsformel: $-\lambda^2 + 4\lambda - 4$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - (4\cdot(-1)\cdot(-4))}}{-2} = \begin{array}{l} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{array}$$

Eigenwerte: $\underline{\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2}}$ $\qquad Am(2) = \underline{3}$

2) EV bestimmen: $(A-\lambda_1 I)x = 0$

$\iff (A-2I)x = 0$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \underset{III - \frac{7}{4}I}{\overset{II + \frac{1}{2}I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix} \longrightarrow \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$

bzw. $\operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$gh(2) = 1 \neq 3$

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Matrix nicht diagonalisierbar :(}}$

Aber:

In dieser Wahl seid ihr frei!
$\longrightarrow$ deshalb ist die Schur-Zerlegung jedoch nicht eindeutig!

1) Ergänze $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ zu einer linear unabhängigen Basis. (hier von $\mathbb{R}^3$)

zB: $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \implies V_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Schritt 1

Es lohnt sich die Standardbasis zu wählen.

2) Berechne $V_1^{-1} A V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3) $A_2 := \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow$ A_2 hat immernoch die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\implies$ wir berechnen die zugehörigen Eigenvektoren:

$(A_2 - 2I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies x = \begin{bmatrix} 2s \\ -s \end{bmatrix} \implies \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

bzw. $\operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

Ergänzen auf $\mathbb{R}^3$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Dann müssen wir hier aber auch in die entsprechende Basis/Dimension ergänzen.

$e_2 \longrightarrow$ ALSO IN 2. DIM. EINSETZEN.

$$V_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{2} & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

DREIECKS-MATRIX :)

$$V_2^{-1} A V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}}$$

$\longrightarrow$ ABER: V_2 IST NOCH NICHT ORTHOGONAL :(

GRAM-SCHMIDT: (SPALTEN VON V_2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\boxed{w_i' = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i, w_k \rangle \cdot w_k}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{w_i = \frac{w_i'}{\sqrt{\langle w_i', w_i' \rangle}}}$$

$$w_1' = v_1 - 0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_2' = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{w_2'}{\sqrt{\langle w_2', w_2' \rangle}} = \frac{3}{\sqrt{42}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$w_3' = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 = \dots =$$

$$w_3 = \frac{w_3'}{\sqrt{\langle w_3', w_3' \rangle}} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{21} \\ \frac{2}{21} \\ \frac{14}{21} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{42}} & -\frac{8}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{14}{21} \end{bmatrix}$$

$$T = U^{-1} A U = U^H A U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{-8}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{14}{21} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{-8}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{14}{21} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{42}} & \frac{58 \cdot \sqrt{3}}{21} \\ 0 & 2 & -\frac{6 \cdot \sqrt{42}}{7} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

SCHUR-ZERLEGUNG VON A.

$$\Longrightarrow A = U A U^H \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{-8}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{14}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{42}} & \frac{58 \cdot \sqrt{3}}{21} \\ 0 & 2 & -\frac{6 \cdot \sqrt{42}}{7} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{-8}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{14}{21} \end{bmatrix}^H$$

Schur-Zerlegung

Berechne die Schur-Zerlegung der Matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1) EW berechnen : $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$$\Longrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) \overset{!}{=} 0$$

$$(5-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 5}} \quad , \quad \underline{\underline{\lambda_3 = 3}}$$

$Am(5) = 2$
$Am(3) = 1$

2) EV berechnen : $\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 5}$: $(A - 5I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5-5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5-5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{III + II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow E_{\lambda_1 = \lambda_2} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\underline{\lambda_3 = 3}$: $(A - 3I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5-3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5-3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ s \end{pmatrix} \Longrightarrow E_{\lambda_3} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

normiere!

$Gm(5) = 1 \neq 2$
$Gm(3) = 1$

Problem : $Am(5) \neq Gm(5)$ $\Longrightarrow$ somit ist die Matrix <u>nicht</u> diagonalisierbar!

Aber : wir können die Schur-Zerlegung berechnen.

AUFSTEIGEND. BIS GM = 2 = AM

$$(A - 5I)^{2} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \overset{II+I}{\underset{III-I}{\leadsto}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{w_i' = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i, w_k \rangle \cdot w_k}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{w_i = \frac{w_i'}{\sqrt{\langle w_i', w_i' \rangle}}}$$

$$w_1' = v_1 - 0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1' \rangle}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2' = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{w_2'}{\sqrt{\langle w_2', w_2' \rangle}} = v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3' = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{w_3'}{\sqrt{\langle w_3', w_3' \rangle}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fourier-Matrizen

Sei $S := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ eine zirkulante Matrix.

Definition 7.5.0.1. Zirkulante Matrix

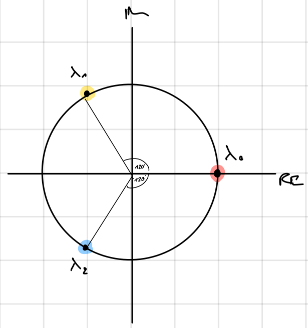
Eine Matrix mit folgender Struktur:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & & c_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & \cdots\, c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

heiss zirkulante Matrix (oder einfach nur ein Zirkulant).

Die Eigenwerte von S:

$$\det(S - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0 \iff \left.\begin{aligned} \lambda_0 &= e^{2\pi i \cdot \frac{0}{3}} = 1 \\ \lambda_1 &= e^{2\pi i \cdot \frac{1}{3}} \\ \lambda_2 &= e^{2\pi i \cdot \frac{2}{3}} \end{aligned}\right\}$$



EV zu λ_0: $(S - \underbrace{1}_{\lambda_0 = 1} \cdot I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{III + I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{III + II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$

bzw. $\operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

EV zu λ_1: $(S - e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \end{array}\right] \overset{\dots}{\rightsquigarrow} \quad x = \begin{bmatrix} s \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ s \cdot e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ s \end{bmatrix} \xRightarrow{s := e^{-\frac{2\pi i}{3}}} \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-\frac{4\pi i}{3}} \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ e^{+\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{2 \cdot \frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} \lambda_1^0 \\ \lambda_1^1 \\ \lambda_1^2 \end{bmatrix}\right\}$$

EV zu λ_2 : $\left(S - e^{-\frac{2\pi i}{3}} \cdot I\right) x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \dots \qquad x = \begin{bmatrix} s \cdot e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ s \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ s \end{bmatrix} \xRightarrow{s := e^{\frac{2\pi i}{3}}} \operatorname{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{2\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)} \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} \lambda_2^0 \\ \lambda_2^1 \\ \lambda_2^2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\underline{V} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{+\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{2 \cdot \frac{2\pi i}{3}} & e^{2\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \lambda_2^0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \lambda_2^1 \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

SPALTEN BILDEN ORTHOGONALE BASIS IN $\mathbb{R}^3$
(FOURIERBASIS)

$\Longrightarrow$ WIR KÖNNEN SIE NORMIEREN
FÜR UNITÄRE MATRIX U

$$\underline{U} := \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{+\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{2 \cdot \frac{2\pi i}{3}} & e^{2\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)} \end{bmatrix}$$

$$S = V D V^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{+\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{2 \cdot \frac{2\pi i}{3}} & e^{2\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\pi i \cdot \frac{0}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \cdot \frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i \cdot \frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{-2 \cdot \frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{+\frac{\pi i}{3}} & e^{-2\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)} \end{bmatrix}$$

$$= U D U^H$$

$\lambda_k = \omega^{-k}$ (zB. $\lambda_1 = e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 1} = \omega^{-1} \Longleftrightarrow \omega = e^{-\frac{2\pi i}{3} \cdot 1}$)

Definition 7.5.0.5. Fourier Matrix

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}^H = \begin{bmatrix} \omega^{0\cdot 0} & \omega^{1\cdot 0} & \cdots & \omega^{(n-1)\cdot 0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^{0\cdot k} & \omega^{1\cdot k} & \cdots & \omega^{(n-1)\cdot k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^{0\cdot(n-1)} & \omega^{1\cdot(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Definition 7.5.0.6. Diskrete Fourier Transformation

Die Abbildung

$$\mathscr{F}_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \ \mathscr{F}_n(\mathbf{y}) = \mathbf{F}\mathbf{y}$$

heisst die diskrete Fourier Transformation (DFT).