BEISPIELAUFGABE : WINTER_2018

2. [6 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem erster Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A IST SYMMETRISCH !

a) [2.5 Punkte] Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

Hinweis: Für $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{z} = az$ gegeben durch $z(t) = c\,e^{at}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Zum Beispiel gilt für $a = -2$: Die Differentialgleichung $\dot{z} = -2z$ hat die Lösung $z(t) = c\,e^{-2t}$, wobei die Konstante c aus der Anfangsbedingung $z(0) = c$ bestimmt werden kann.

c) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$ zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

---

a) AUFG: DIAGONALISIERE A. (THEORIE WM)

1) EW VON A BESTIMMEN :

$$\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + 0 + 0 - 0 - (-\lambda) - (-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 2 \overset{!}{=} 0 \qquad \text{MIT } \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_{1,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lambda_1 = -1} \quad \underline{\lambda_2 = 0} \quad \underline{\lambda_3 = 2}$$

(OFT AUFSTEIGEND ANGEGEBEN ...)

$$\Rightarrow \underline{D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

BEISPIELAUFGABE : WINTER_2018 TEIL 2

a. 2) ZUGEHÖRIGE EIGENVEKTOREN BESTIMMEN: DURCH LÖSEN VON $(A-\lambda_i I)x = 0$

EV$_1$ zu $\lambda_1 = 0$: $(A - 0I)x = 0$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{III-II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -s \end{array} \Longrightarrow EV_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

NORMIEREN!

EV$_2$ zu $\lambda_2 = -1$: $(A + 1I)x = 0$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{II-I}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{III-II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \in \mathbb{R} \\ x_2 = -s \\ x_1 = -x_2 = s \end{array} \Longrightarrow EV_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

NORMIEREN!

EV$_3$ zu $\lambda_3 = 2$: $(A - 2I)x = 0$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{II+2I}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{III+II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \in \mathbb{R} \\ x_2 = 2x_3 = 2s \\ x_1 = x_3 = s \end{array} \Longrightarrow EV_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

NORMIEREN!

$$\Longrightarrow T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = T^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Satz 7.3.0.1. Symmetrische Matrizen haben reele Eigenwerte und orthgonale Eigenvektoren

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *(bzw.* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$*) eine symmetrische (bzw. Hermite-symmetrische) Matrix. Dann sind alle Eigenwerte von* $\mathbf{A}$ *reell und alle Eigenvektoren von* $\mathbf{A}$ *sind orthogonal.*

⟶ DA WIR SIE SOGAR NORMIERT HABEN, IST JETZT T ORTHOGONAL :)

$\Longrightarrow T^{-1} = T^T$

BEISPIELAUFGABE : WINTER_2018 TEIL 3

a)

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = TDT^{-1} = \underbrace{\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ T^{(1)} \quad T^{(2)} \quad T^{(3)} \end{array}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}_{T^{-1}}}$$

b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

Hinweis: Für $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{z} = az$ gegeben durch $z(t) = c\,e^{at}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Zum Beispiel gilt für $a = -2$: Die Differentialgleichung $\dot{z} = -2z$ hat die Lösung $z(t) = c\,e^{-2t}$, wobei die Konstante c aus der Anfangsbedingung $z(0) = c$ bestimmt werden kann.

b) SUBSTITUTION ('GANZE' HERLEITUNG W11/12)

SUBSTITUTION:

$x := T^{-1}y \iff y = Tx$

$\dot{y} = Ay \iff \dot{y} = TDT^{-1}y$

$\iff \dot{x} = Dx \xrightarrow{\text{DIAGONAL MATRIX}} \dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t)$

$\xrightarrow{\text{TIPP}} x_i(t) = e^{\lambda_i t} \cdot c_i$

$\xrightarrow{\text{SUBST.}} y(t) = Tx$

$y(t) = \boxed{\underline{T}^{(1)} e^{\lambda_1 t} \cdot c_1 + \underline{T}^{(2)} e^{\lambda_2 t} \cdot c_2 + \underline{T}^{(3)} e^{\lambda_3 t} \cdot c_3} \quad ..$

$$\boxed{\Longrightarrow y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot e^{(-1)t} \cdot c_1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{1}_{= e^{0t} = 1} \cdot c_2 + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} e^{2t} c_3}$$

c) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$ zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c) BESTIMME $x(0)$ ALS $y(0) = T\,x(0) = T \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow$ MATRIXFORM:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{II+I \\ III-I}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & 3 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{III+2II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{6}{\sqrt{6}} & 5 \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow$ III: $\underline{\underline{c_3 = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{6}}}$

$\Longrightarrow$ II: $\frac{1}{\sqrt{2}} c_2 + \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{6} = 3 \Longrightarrow \underline{\underline{c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}}}$

$\Longrightarrow$ I: $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{6} = 1 \Longrightarrow \underline{\underline{c_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3}}}$

$\longrightarrow$ IN DIE ALLGEMEINE LÖSUNG VON b) EINSETZEN :)

$$\boxed{\Longrightarrow y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot e^{(-1)t} \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} e^{2t} \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{6}}$$

$= e^{0t} = 1$