ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Netzwerke und Schaltungen II

Übung 2
Impedanzen & Zeigerdiagramme

THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

Wiederholung: Zeigerdiagramm

ZEIGER $_{t=0}$: $\underline{\hat{u}} = \hat{u} e^{j\varphi_u}$

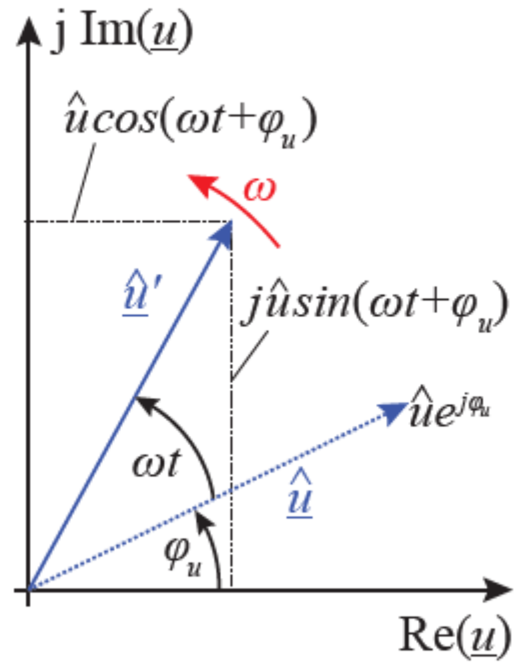
ROT. ZEIGER : $\underline{\hat{u}}' = \hat{u} e^{j\varphi_u} * e^{j\omega t}$

$= \hat{u} e^{j(\varphi_u + \omega t)}$

$= \hat{u} \left[\cos(\varphi_u + \omega t) + j \sin(\varphi_u + \omega t) \right]$

PHYSIKALISCH MESSBAR $\Longrightarrow \mathrm{Re}\{\underline{\hat{u}}'\} = \mathrm{Re}\{\hat{u} \left[\cos(\varphi_u + \omega t) + j \sin(\varphi_u + \omega t) \right]\}$

$= \hat{u} \cdot \cos(\varphi_u + \omega t)$



- **Transformation der Quellgrössen in den Bildbereich**
  - **Zeiger der Quellgrösse bestimmen**
    - $\hat{u}\, \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi_u}) \rightarrow \underline{\hat{u}} = \hat{u}\, \boldsymbol{e^{j\varphi_u}}$
    - $\hat{u}\, \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi_u}) = \hat{u}\, \boldsymbol{cos}\left(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi_u} \underbrace{- \frac{\pi}{2}}_{= -90°}\right) \rightarrow \underline{\hat{u}} = \hat{u}\, \boldsymbol{e^{j\left(\varphi_u - \frac{\pi}{2}\right)}}$
- **Analyse des Netzwerkes im Bildbereich**
  - **Knotengleichung**

$$\sum_{k=1}^{N} \underline{\hat{i}}_k = 0$$

  - **Maschengleichungen**

$$\sum_{k=1}^{N} \underline{\hat{u}}_k = 0$$

  - **Beziehung der Ströme und Spannungen an Bauelementen mit Impedanzen**
- **Rücktransformation in den Zeitbereich**
  - **Lösungszeiger (z.B. $\underline{\hat{u}}_2$)**
  - $\boldsymbol{u_2(t)} = \Re\{\underline{\hat{u}}_2\, \boldsymbol{e^{j\omega t}}\} = \hat{u}_2 \cos(\omega t \underbrace{+ \varphi}_{\text{HIER KEINE PHASE...}})$

(ABER ALLGEMEIN SCHON MÖGLICH)

Wiederholung: Operationen im Bildbereich

- **Differentiation**

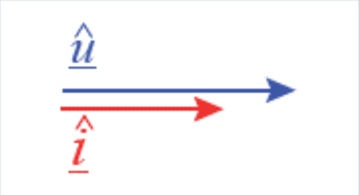
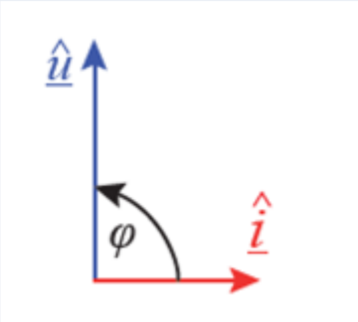
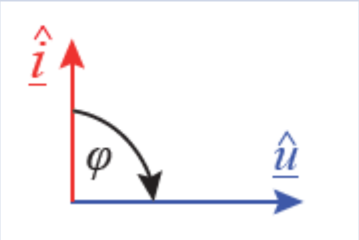
$$\frac{d}{dt}\left(\underline{\hat{u}}e^{j\omega t}\right) = j\omega \cdot \underline{\hat{u}}e^{j\omega t}$$

- **Integration**

$$\int \underline{\hat{u}}e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{\hat{u}}e^{j\omega t}$$

Zeitbereich	Bildbereich
$\frac{d}{dt}\dots$ $\hat{=} +90°$ VERSCHIEBUNG DER PHASE $= j$	$j\omega \cdot \dots$
$\int \dots dt$ $\hat{=} -90°$ VERSCHIEBUNG DER PHASE $= \cdot(-j)$	$\frac{1}{j\omega} \cdot \dots$

Wiederholung: Zeigerdiagramme der Bauelemente R, L, C

Bauelement	Zeitbereich	Bildbereich	Zeigerdiagramm
Widerstand	$\boldsymbol{u_R = R \cdot i_R}$	$\underline{\hat{u}}_R = R \cdot \underline{\hat{i}}_R$	
Induktivität<u>en</u> STRÖME SICH <u>VERSPÄTEN</u>	$\boldsymbol{u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}}$	$\underline{\hat{u}}_L = \underbrace{j\omega L}_{\underline{Z}_L} \cdot \underline{\hat{i}}_L$	
Konden<u>sator</u> STROM GEHT <u>VOR</u>	$\boldsymbol{u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C dt}$	$\underline{\hat{u}}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{\hat{i}}_C$ $= \underbrace{-\frac{j}{\omega C}}_{\underline{Z}_C} \cdot \underline{\hat{i}}_C$	

Bauelement	Zeitbereich	Bildbereich	Impedanz
Widerstand	$\boldsymbol{u_R = R \cdot i_R}$	$\underline{\hat{u}}_R = R \cdot \underline{\hat{i}}_R$	$\underline{Z}_R = R$
Induktivität	$\boldsymbol{u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}}$	$\underline{\hat{u}}_L = j\omega L \cdot \underline{\hat{i}}_L$	$\underline{Z}_L = j\omega L$
Kondensator	$\boldsymbol{u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C dt}$	$\underline{\hat{u}}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{\hat{i}}_C = -\frac{j}{\omega C} \cdot \underline{\hat{i}}_C$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$

Impedanz Z bezeichnet den zeitlich unabhängigen komplexen Wechselstromwiderstand

$$\boxed{\underline{\hat{u}} = \underline{Z}\,\underline{\hat{i}}}$$

!

Impedanzen II

NUS 1:

$$U = R * I$$

NUS 2:

$$\underline{\hat{u}} = \underline{Z} * \underline{\hat{i}}$$

IMMER POSITIV!

- **Mit Wirkwiderstand (Resistenz) R und Blindwiderstand (Reaktanz) X**

$$\boxed{\underline{Z} = R + jX = |\underline{Z}|e^{j\varphi}} \qquad [\underline{Z}] = \Omega$$

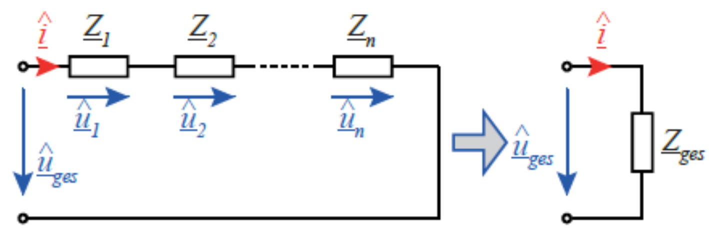
- **Mit Wirkleitwert (Konduktanz) G und Blindleitwert (Suszeptanz) B**

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \underline{Y} = G + jB = |\underline{Y}|e^{j\psi} \qquad [\underline{Y}] = \Omega^{-1}$$

SIEMENS

- **Reihenschaltung**

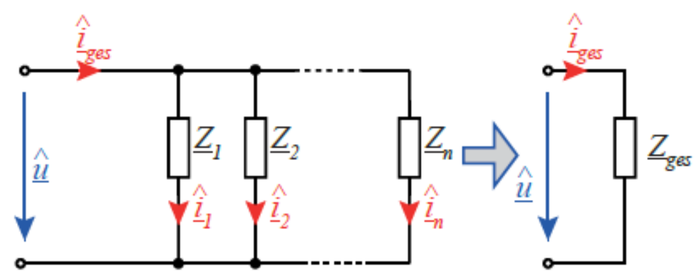
$$\underline{Z}_{ges} = \sum_k^n \underline{Z}_k$$



- **Parallelschaltung**

$$\underline{Y}_{ges} = \sum_k^n \underline{Y}_k$$

$$\underline{Z}_{ges} = \frac{1}{\sum_k^n \frac{1}{\underline{Z}_k}}$$

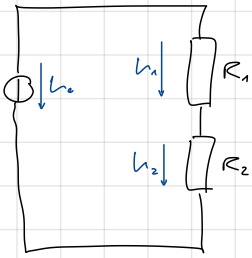
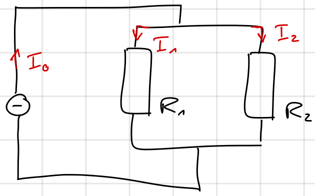
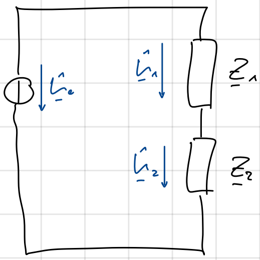
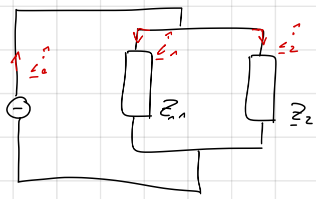


Der Blindwiderstand der Gesamtimpedanz gibt uns das Verhalten des Netzwerks an:

X > 0: induktiv

X < 0: kapazitiv

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = j\left[\frac{-1}{\omega C}\right]$$

	SPANNUNGSTEILER	STROMTEILER
MLS 1	 $\boxed{u_1 = u_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$	 $\boxed{I_1 = I_0 \frac{R_2}{R_2 + R_1}}$
MLS 2	 $\boxed{\underline{\hat{u}}_1 = \underline{\hat{u}}_0 \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}}$	 $\boxed{\underline{\hat{i}}_1 = \underline{\hat{i}}_0 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}}$

Impedanzen IV

Generelles Vorgehen:

- **Quellen in komplexe Zeiger umwandeln**
- **Widerstände, Induktivitäten, Kondensatoren in Impedanzen umwandeln**
- **Gesamtimpedanz berechnen**
- **Gesamtstrom/Gesamtspannung ermitteln**
- **Teilspannungen und Teilströme mit Spannungs-/Stromteiler berechnen**
- **Falls gefragt: Zeigerdiagramm zeichnen**
- **Rücktransformation in den Zeitbereich**

BEISPIELAUFGABE

Aufgabe 1 Komplexe Impedanzen und Zeigerdiagramme

Gegeben sie die Schaltung aus einer Induktivität L, einem Widerstand R und einer Kapazität C wie in Abb. 1 dargestellt. Die Schaltung wird von einer Sinusspannungsquelle mit der Ausgangsspannung $u_0 = \hat{u}_0 \cdot cos(\omega t)$ gespeist.

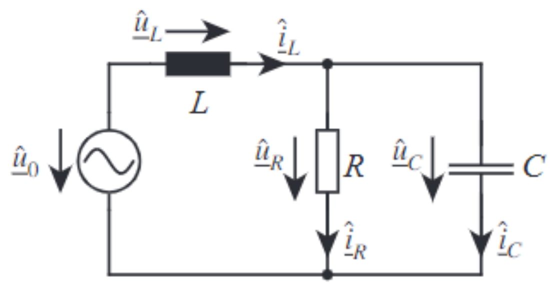


Abbildung 1: RLC Schaltung

1.1) Geben Sie die Gesamtimpedanz der Schaltung an.

1.2) Bestimmen Sie den komplexen Amplitudenzeiger $\underline{\hat{i}}_C$ des Stroms durch die Kapazität C.

1.3) Skizzieren Sie die Zeitverläufe der Spannung $u_0(t)$ sowie es Stroms $i_C(t)$. Nehmen Sie dabei eine Phasenverschiebung von $-22.5°$ für den Strom an. Die Phase der Spannung sei $0°$.

1.4) Konstruieren Sie qualitativ ein Zeigerdiagramm für alle Spannungen und Ströme der Schaltung. Legen Sie dabei den Strom $\underline{\hat{i}}_R$ in die reelle Achse.