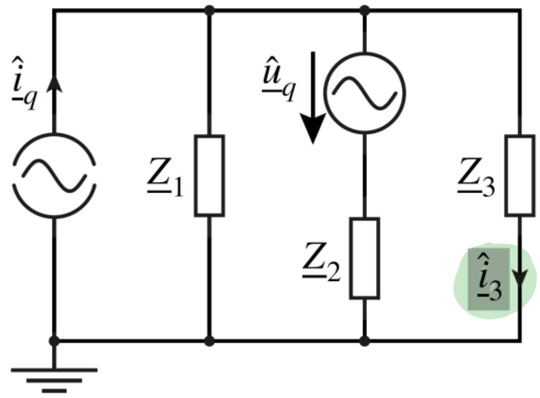
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Netzwerke und Schaltungen II

Übung 6
Superposition, Ersatzquellen, Stern-Dreieck-Umwandlung

THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

- **Superposition**
  - Gesucht: $\hat{\underline{i}}_3$



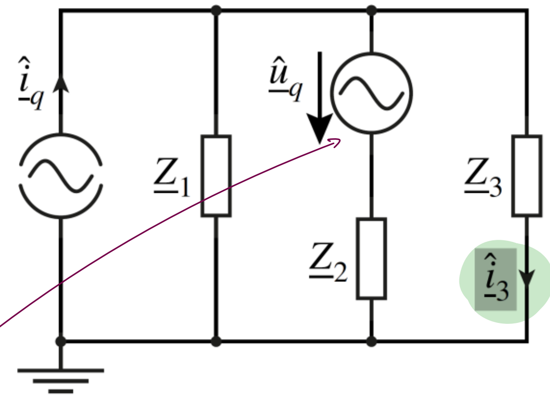
ABER WIE ?

- Lineare Netzwerke -> Teileinflüsse einzelner Quellen können aufsummiert werden, um Gesamtergebnis zu erhalten
- Teileinfluss einer Quelle -> andere Quellen null setzen
  - Spannungsquelle -> Kurzschluss (0 V Spannungsabfall)
  - Stromquelle -> Leerlauf (0 A Strom)
- Superposition nicht gültig für nichtlineare Netzwerke
- Lineare Netzwerke können enthalten
  - Widerstand
  - Spule
  - Kapazität
  - Stromquellen
  - Spannungsquellen
  - Keine Dioden
  - Keine Transistoren

!

 STEP BY STEP :)

- **Superposition**
  - Gesucht: $\underline{\hat{i}}_3$



PROBLEM: · ZU VIELE QUELLEN UM $\underline{\hat{i}}_3$ DIREKT ZU BERECHNEN :/

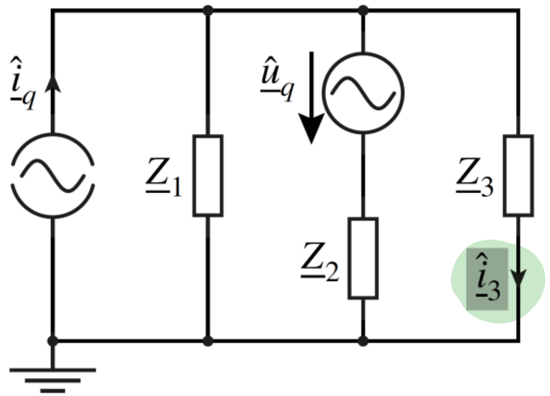
BEMERKUNG: LINEARES NETZWERK :) (ABER WARUM NOCHMAL?)

LÖSUNGSSTRATEGIE: · JEDE QUELLE ALLEINE BETRACHTEN
(ALLE ANDEREN QUELLEN JEWEILS = 0 SETZEN)

Superposition Beispiel

STEP 1

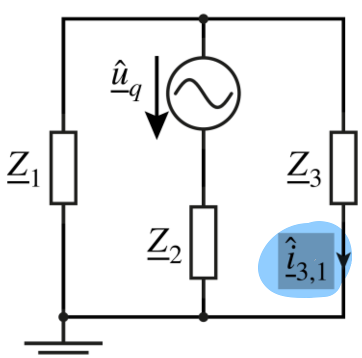
- **Superposition**
  - Gesucht: $\hat{\underline{i}}_3$



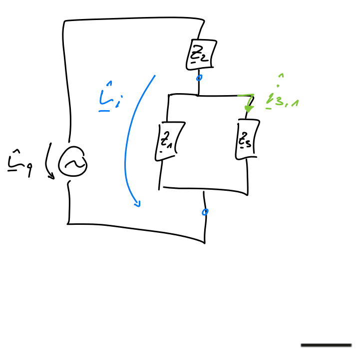
- **Wirkung von $\hat{\underline{u}}_q$** ($\Longrightarrow$ STROMQUELLE $\overset{!}{=} 0$)

$$\hat{\underline{i}}_{3,1} = \frac{1}{\underline{Z}_2 + (\underline{Z}_1 || \underline{Z}_3)} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} \hat{\underline{u}}_q$$

VERSUCHT DIESE HERLEITUNG SELBER NOCHMALS :)



$\Longrightarrow$



$$\hat{\underline{i}}_{3,1} = \frac{\underline{i}_i}{\underline{Z}_3} = \frac{\left[\frac{(\underline{Z}_1 \parallel \underline{Z}_3)}{(\underline{Z}_1 \parallel \underline{Z}_3) + \underline{Z}_2} \cdot \hat{\underline{u}}_q\right]}{\underline{Z}_3}$$

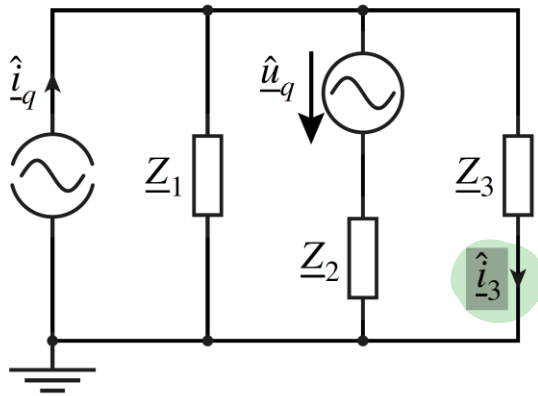
$$= \frac{\frac{\frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}}{\frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} + Z_2} u_q}{Z_3}$$

$$= \frac{Z_1 \cancel{Z_3}\, u_q}{Z_2 (Z_1 + Z_3) + Z_1 Z_3} \cdot \frac{1}{\cancel{Z_3}}$$

$$= \hat{\underline{u}}_q \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3}$$

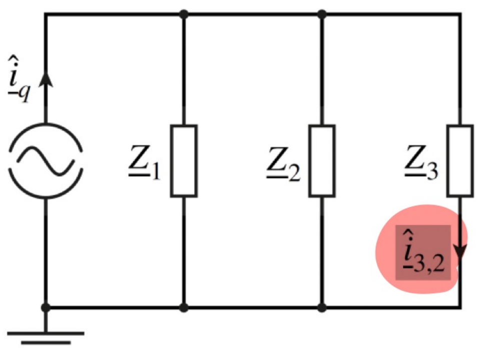
Superposition Beispiel STEP 2

- **Superposition**
  - Gesucht: $\hat{\underline{i}}_3$



- **Wirkung von $\hat{\underline{i}}_q$**

$$\hat{\underline{i}}_{3,2} = \frac{(\underline{Z}_1 || \underline{Z}_2)}{(\underline{Z}_1 || \underline{Z}_2) + \underline{Z}_3} \hat{\underline{i}}_q$$



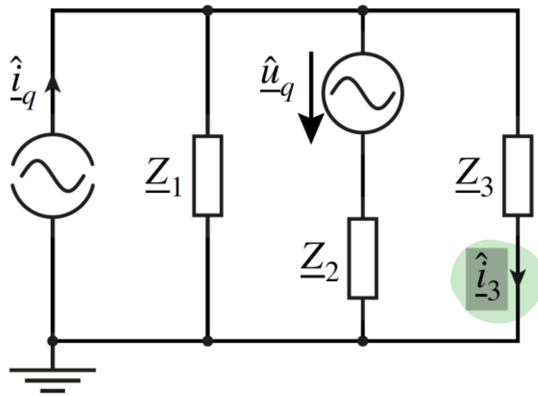
$\Longrightarrow$ STROMTEILER : $\frac{\hat{\underline{i}}_{3,2}}{\hat{\underline{i}}_q} = \frac{(\underline{Z}_1 || \underline{Z}_2)}{(\underline{Z}_1 || \underline{Z}_2) + \underline{Z}_3}$

$$\Longleftrightarrow \hat{\underline{i}}_{3,2} = \hat{\underline{i}}_q \cdot \frac{(\underline{Z}_1 || \underline{Z}_2)}{(\underline{Z}_1 || \underline{Z}_2) + \underline{Z}_3}$$

Superposition Beispiel

Finito :)

- **Superposition**
  - **Gesucht:** $\underline{\hat{i}}_3$



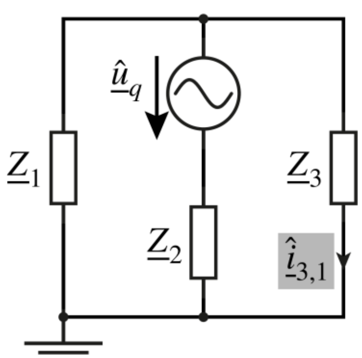
- **Lösung**

$$\underline{\hat{i}}_3 = \underline{\hat{i}}_{3,1} + \underline{\hat{i}}_{3,2}$$

- **Wirkung von $\underline{\hat{u}}_q$**

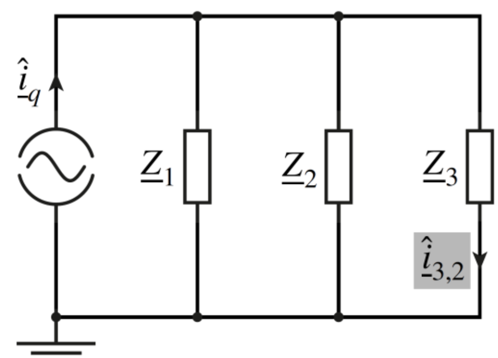
$$\underline{\hat{i}}_{3,1} = \frac{1}{\underline{Z}_2 + (\underline{Z}_1 || \underline{Z}_3)} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} \underline{\hat{u}}_q$$

VERSUCHT DIESE HERLEITUNG SELBER NOCHMALS :)

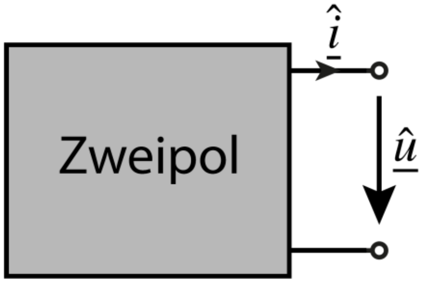


- **Wirkung von $\underline{\hat{i}}_q$**

$$\underline{\hat{i}}_{3,2} = \frac{(\underline{Z}_1 || \underline{Z}_2)}{(\underline{Z}_1 || \underline{Z}_2) + \underline{Z}_3} \underline{\hat{i}}_q$$

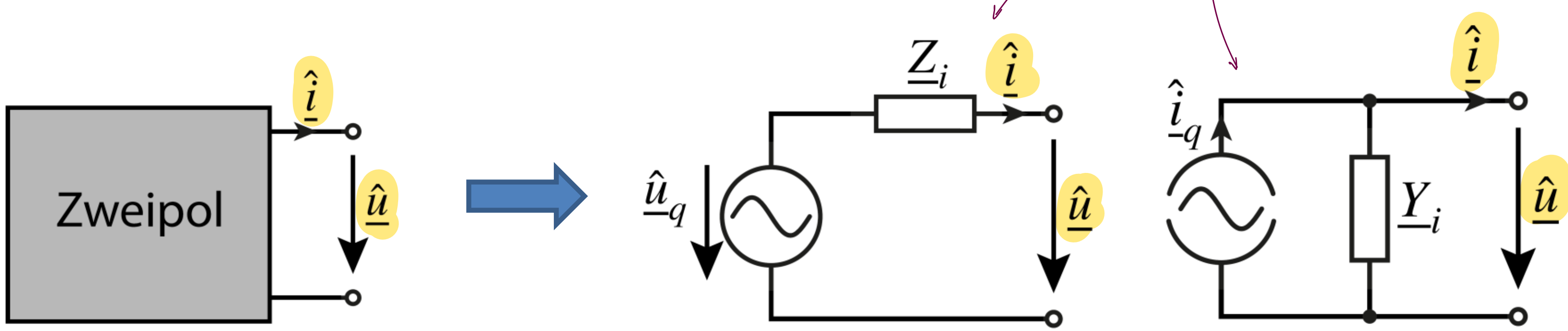


- **Ein <u>Zweipol</u> ist ein abgeschlossenes Netzwerk ohne elektrische oder magnetische Kopplung nach aussen.**
  - **Passive Zweipole: Bestehen nur aus passiven Bauelementen (R, L, C und Transformatoren)**
  - **Aktive Zweipole: Enthalten neben passiven Bauelementen auch Quellen**
- **Lineare Zweipole, d.h. Zweipole deren Verhalten unabhängig von der Spannungs- und Stromamplitude ist, weisen ein <u>lineares Klemmenverhalten</u> auf.**



- **Das Klemmenverhalten des Zweipols kann vollständig durch einen Ersatzzweipol beschrieben werden.**
- **Die zwei meist verwendeten Ersatznetzwerke sind**
  - **Ersatzspannungsquelle (Thévenin-Ersatzschaltung)**
  - **Ersatzstromquelle (Norton-Ersatzschaltung)**

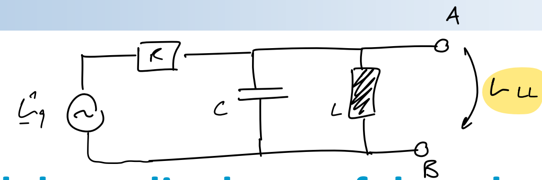
NUR ÄQUIVALENTES VERHALTEN BEZÜGLICH DEN KLEMMEN !



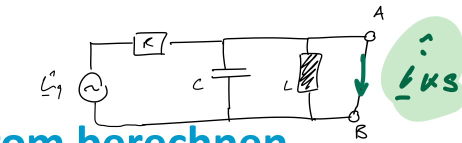
$$\hat{\underline{u}} = \hat{\underline{u}}_q - \underline{Z}_i \hat{\underline{i}} \qquad \hat{\underline{i}} = \hat{\underline{i}}_q - \underline{Y}_i \hat{\underline{u}}$$

- **Klemmengleichungen:**
  - Thévenin: $\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}_q - \underline{Z}_i \underline{\hat{i}}$
  - Norton: $\underline{\hat{i}} = \underline{\hat{i}}_q - \underline{Y}_i \underline{\hat{u}}$
- **Jeweils zwei Unbekannte:**
  - Thévenin: $\underline{\hat{u}}_q$ und $\underline{Z}_i$
  - Norton: $\underline{\hat{i}}_q$ und $\underline{Y}_i$
- **Zwei beliebige Punkte notwendig zur Bestimmung der Unbekannten**
- **Meist verwendete Kenngrössen:**
  - Leerlauf $\underline{\hat{u}}_{LL}$
  - Kurzschluss $\underline{\hat{i}}_{KS}$
  - Innenimpedanz/-admittanz $\underline{Z}_i$, resp. $\underline{Y}_i$

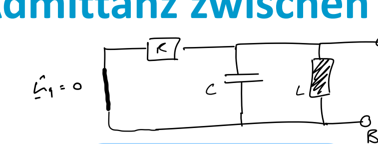
$\Longrightarrow \underline{\hat{u}}_{LL} = \underline{Z}_i \cdot \underline{\hat{i}}_{KS}$



- **Leerlaufspannung $\underline{\hat{u}}_{LL}$**
  - **Strom zwischen Klemmen auf null setzen und dann die daraus folgende Spannung berechnen.**



- **Kurzschlussstrom $\underline{\hat{i}}_{KS}$**
  - **Klemmen kurzschliessen und den daraus folgenden Strom berechnen.**
- **Innenimpedanz/-admittanz $\underline{Z}_i$, resp. $\underline{Y}_i$**
  - **Alle Quellen auf null setzen und dann die Impedanz/Admittanz zwischen den Klemmen berechnen.**

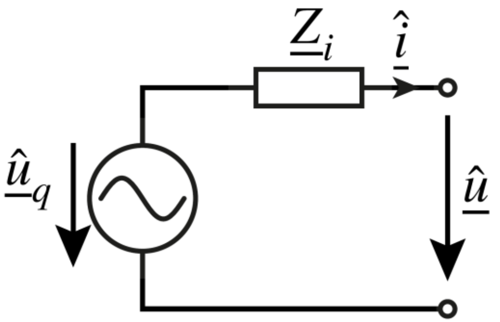


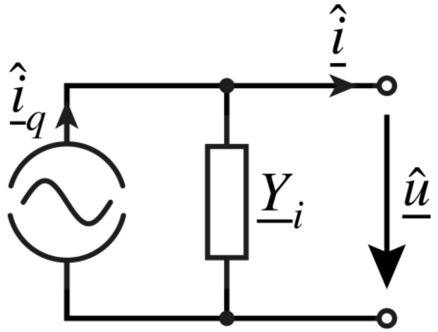
$\longrightarrow \underline{Z}_i = (\underline{Z}_R \parallel \underline{Z}_C \parallel \underline{Z}_L)$

- **Superposition**
  - **Allenfalls ist für die Berechnung der obigen Grössen die Anwendung des Superpositionsprinzips (Überlagerungssatz) notwendig.**

$$\Longrightarrow \underline{\hat{u}}_{LL} = \underline{Z}_i \cdot \underline{\hat{i}}_{KS}$$

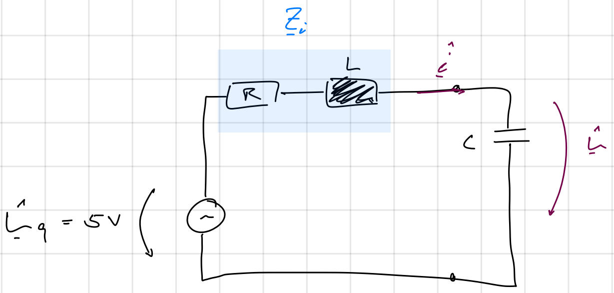
- **Kurzschluss an Anschlussklemmen**
  - $\underline{\hat{u}} = 0 \;\rightarrow\; \underline{\hat{i}} = \underline{\hat{i}}_{KS} = \underline{\hat{i}}_q = \frac{\underline{\hat{u}}_q}{\underline{Z}_i}$
- **Leerlauf an Anschlussklemmen**
  - $\underline{\hat{i}} = 0 \;\rightarrow\; \underline{\hat{u}} = \underline{\hat{u}}_{LL} = \underline{\hat{u}}_q = \frac{\underline{\hat{i}}_q}{\underline{Y}_i}$
- **Thévenin- und Nortonersatzschaltung können ineinander umgerechnet werden**



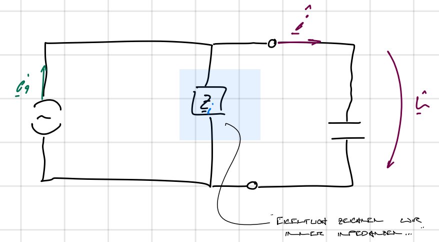


Bsp.

$\underline{Z}_L = 5j\,\Omega \;;\; R = 2\,\Omega \;;\; \underline{Z}_C = -10j\,\Omega$



$\Longleftrightarrow$



$\underline{Z}_i = (2 + 5j)\,\Omega$

$\underline{Z}_C = -10j\,\Omega$

$\underline{Z}_{tot} = (2 - 5j)\,\Omega$

AUS DEN KNOTENGLEICHUNGEN WISSEN WIR:

BEI LEERLAUF $= 0$

$$\underline{\hat{i}} = \underline{\hat{i}}_q - \underline{j}\cdot\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{i}}_q - \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{Z}_i}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\hat{i}}_q = \frac{\underline{\hat{u}}_q}{\underline{Z}_i} = (0.345 - 0.86j)\,A$$

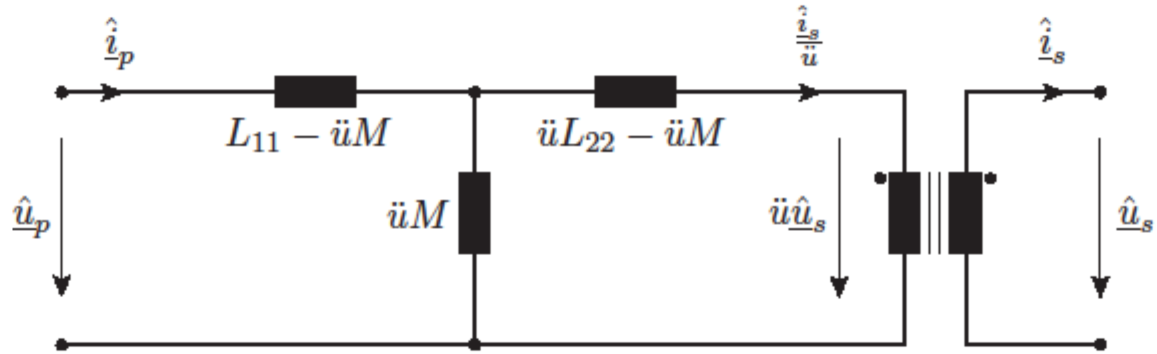
$$\underline{\hat{i}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{Z}_{tot}} = (0.345 + 0.862j)\,A \quad = \quad \underline{\hat{i}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{Z}_C} = (0.345 + 0.862j)\,A$$

$$\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{i}}\cdot\underline{Z}_C = (8.62 - 3.45j)\,V \quad = \quad \underline{\hat{u}} = \underline{Z}_{tot}\cdot\underline{\hat{i}}_q = (8.62 - 3.45j)\,V$$

Transformator – Allgemeines Ersatzschaltbild

$$\underline{\hat{u}}_p = L_{11}\frac{d\underline{\hat{\imath}}_p}{dt} - M\frac{d\underline{\hat{\imath}}_s}{dt}$$

$$\underline{\hat{u}}_s = -L_{22}\frac{d\underline{\hat{\imath}}_s}{dt} + M\frac{d\underline{\hat{\imath}}_p}{dt}$$



Die obigen Gleichungen beschreiben das allgemeine Ersatzschaltbild des verlustlosen Übertragers, im Frequenzbereich erhält man:

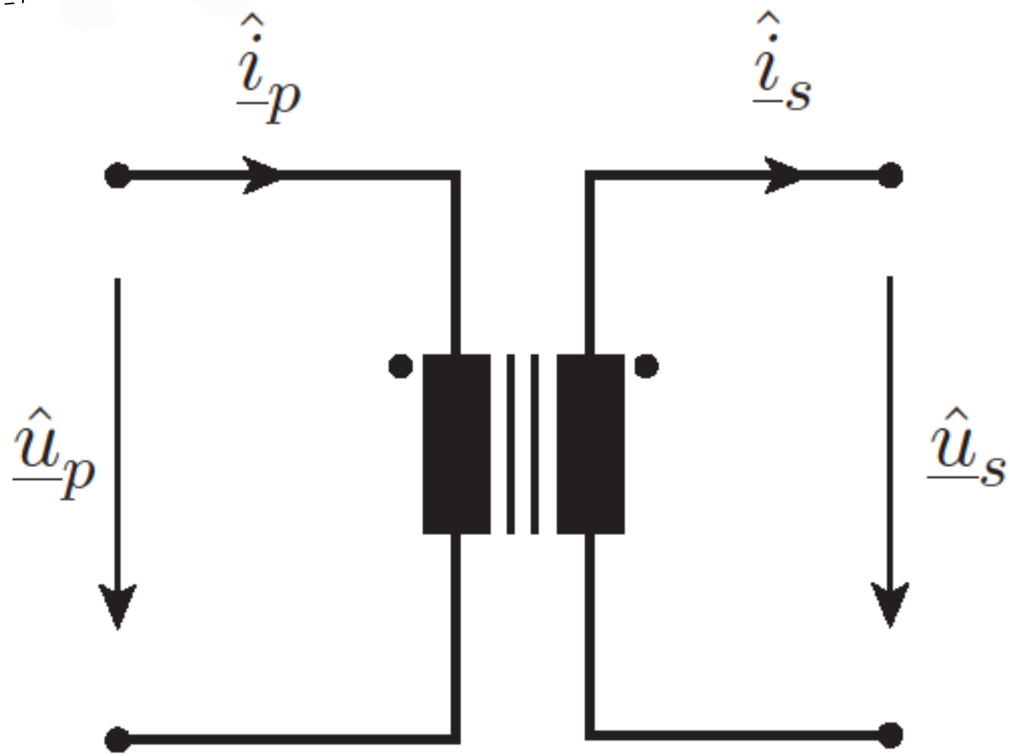
$$\underline{U}_p(j\omega) = j\omega L_{11}\underline{I}_p(j\omega) - j\omega M\underline{I}_s(j\omega)$$

$$\underline{U}_s(j\omega) = -j\omega L_{22}\underline{I}_s(j\omega) + j\omega M\underline{I}_p(j\omega)$$

$$\frac{\underline{\hat{u}}_p}{\underline{\hat{u}}_s} = \frac{\underline{\hat{i}}_s}{\underline{\hat{i}}_p} \Longleftrightarrow \underline{\hat{u}}_p \underline{\hat{i}}_p = \underline{\hat{u}}_s \underline{\hat{i}}_s$$

$$\underline{\hat{u}}_p = \ddot{u}\underline{\hat{u}}_s \longrightarrow \ddot{u} = \frac{\underline{\hat{u}}_p}{\underline{\hat{u}}_s}$$

$$\underline{\hat{i}}_s = \ddot{u}\underline{\hat{i}}_p \longrightarrow \ddot{u} = \frac{\underline{\hat{i}}_s}{\underline{\hat{i}}_p}$$



Für den Frequenzbereich:

$$\underline{U}_p(j\omega) = \ddot{u}\underline{U}_s(j\omega)$$

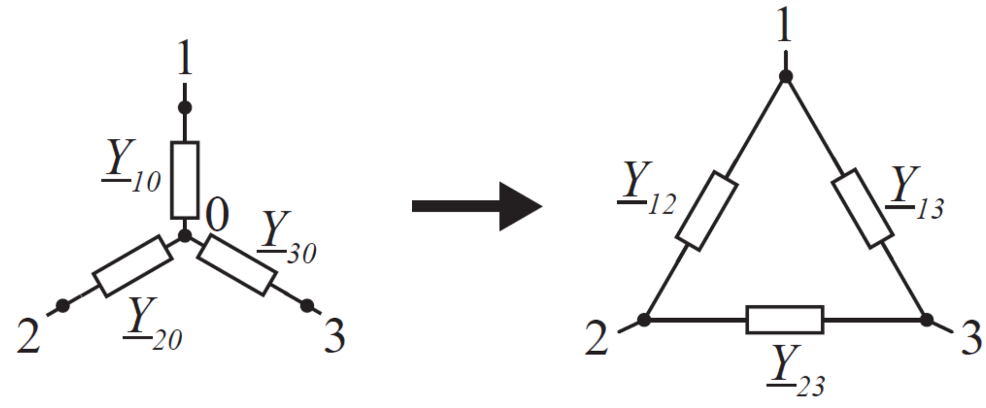
$$\underline{I}_s(j\omega) = \ddot{u}\underline{I}_p(j\omega)$$

Stern-Dreieck-Umwandlung

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_{10}\,\underline{Y}_{20}}{\sum \underline{Y}}$$

$$\underline{Y}_{13} = \frac{\underline{Y}_{10}\,\underline{Y}_{30}}{\sum \underline{Y}}$$

$$\underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Y}_{20}\,\underline{Y}_{30}}{\sum \underline{Y}}$$



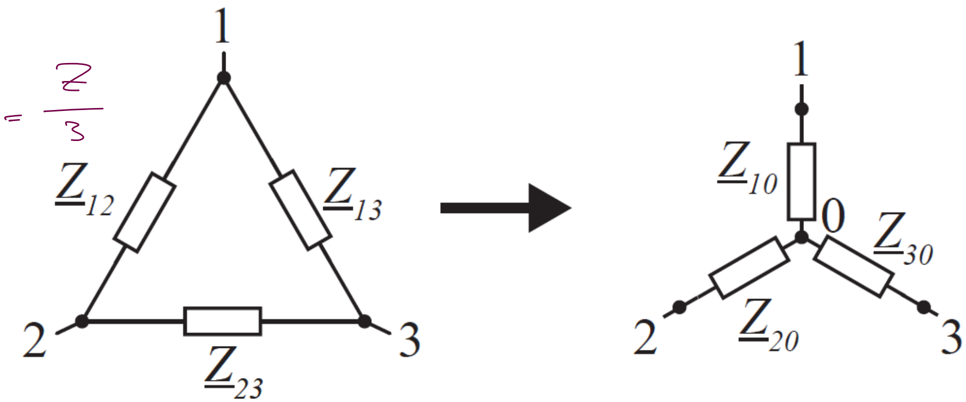
a)

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{Z}_{12}\,\underline{Z}_{13}}{\sum \underline{Z}}$$

Sym. $= \frac{Z^2}{3Z} = \frac{Z}{3}$

$$\underline{Z}_{20} = \frac{\underline{Z}_{12}\,\underline{Z}_{23}}{\sum \underline{Z}}$$

$$\underline{Z}_{30} = \frac{\underline{Z}_{13}\,\underline{Z}_{23}}{\sum \underline{Z}}$$



b)

BEISPIELAUFGABE

Aufgabe 1 Superposition

Gegeben sei das Widerstandsnetzwerk in Abbildung 1. Bestimmen Sie den Strom $\hat{\underline{i}}_C$ in Abhängigkeit von $\hat{\underline{u}}_0$ und $\hat{\underline{i}}_0$ mit Hilfe des Überlagerungssatzes. Verwenden Sie bei der Berechnung komplexe Impedanzen und gehen Sie von sinusförmigen Wechselgrössen mit der Kreisfrequenz ω aus.

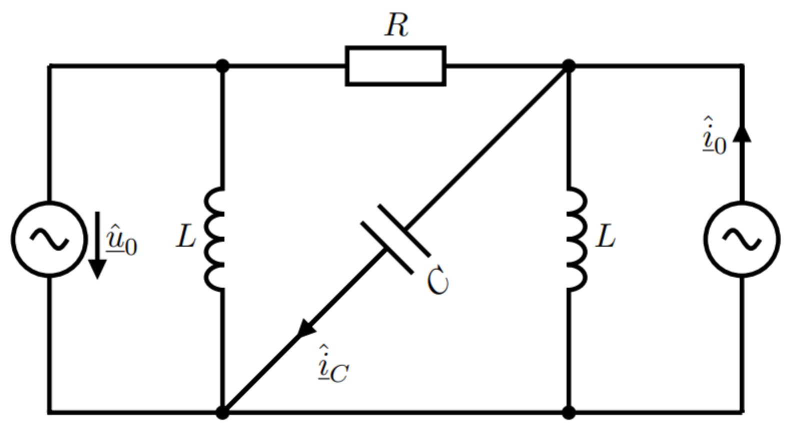


Abbildung 1: Gesucht ist der Strom $\hat{\underline{i}}_C$ mit Hilfe des Überlagerungssatzes

Aufgabe 2 Ersatzquellen

Bestimmen Sie für das Widerstandsnetzwerk in Abbildung 2 die für die Ersatzquellen (Thévenin und Norton) erforderlichen Kenngrössen Leerlaufspannung $\underline{\hat{u}}_{\mathrm{LL}}$, Kurzschlussstrom $\underline{\hat{i}}_{\mathrm{KS}}$ und Innenimpedanz Z bezüglich den Klemmen A und B. Gehen Sie bei $\underline{\hat{u}}_0$ von einer sinusförmigen Wechselspannung mit Kreisfrequenz ω aus.

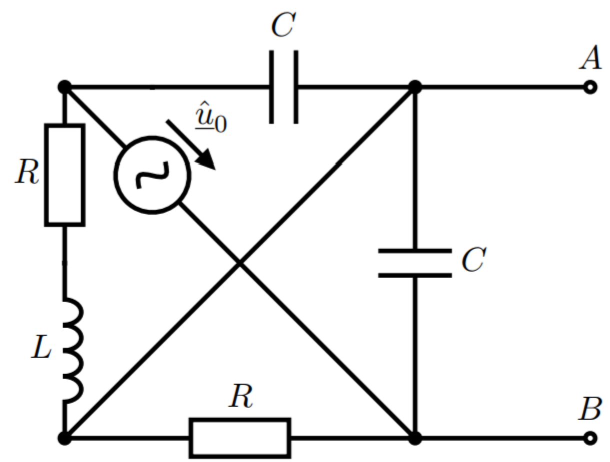


Abbildung 2: Gesucht sind die für die Thévenin- und Nortonersatzschaltung erforderlichen Kenngrössen Leerlaufspannung $\underline{\hat{u}}_{\mathrm{LL}}$, Kurzschlussstrom $\underline{\hat{i}}_{\mathrm{KS}}$ und Innenimpedanz Z bezüglich den Klemmen A und B.