ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Netzwerke und Schaltungen II

Übung 8
Knotenpotentialverfahren :)

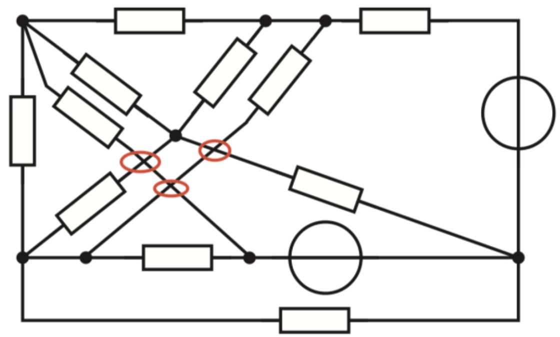
THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

Analyse von Netzwerken

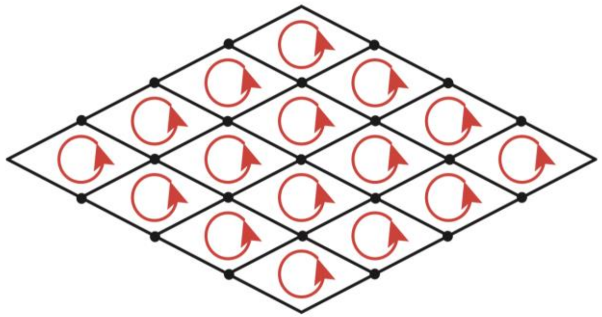
- Berechnung von Strömen und Spannungen in einem elektrischen Netzwerk
- Definition eines *Netzwerkes*:
  - Zusammenschaltung von Netzwerkelementen, die über Klemmen auf beliebige Weise verschalten sind
  - Verbindungsstellen werden *Knoten* genannt
  - Teile zwischen jeweils zwei Knoten werden *Zweige* genannt

Klassifizierung von Netzwerken

- Nicht-kreuzungsfreie Netzwerke
- Kreuzungsfreie (ebene) Netzwerke
  - Zweige des Netzwerks schneiden sich nur in Knoten
  - Treten in der Praxis häufig auf



Nicht-kreuzungsfreies Netzwerk

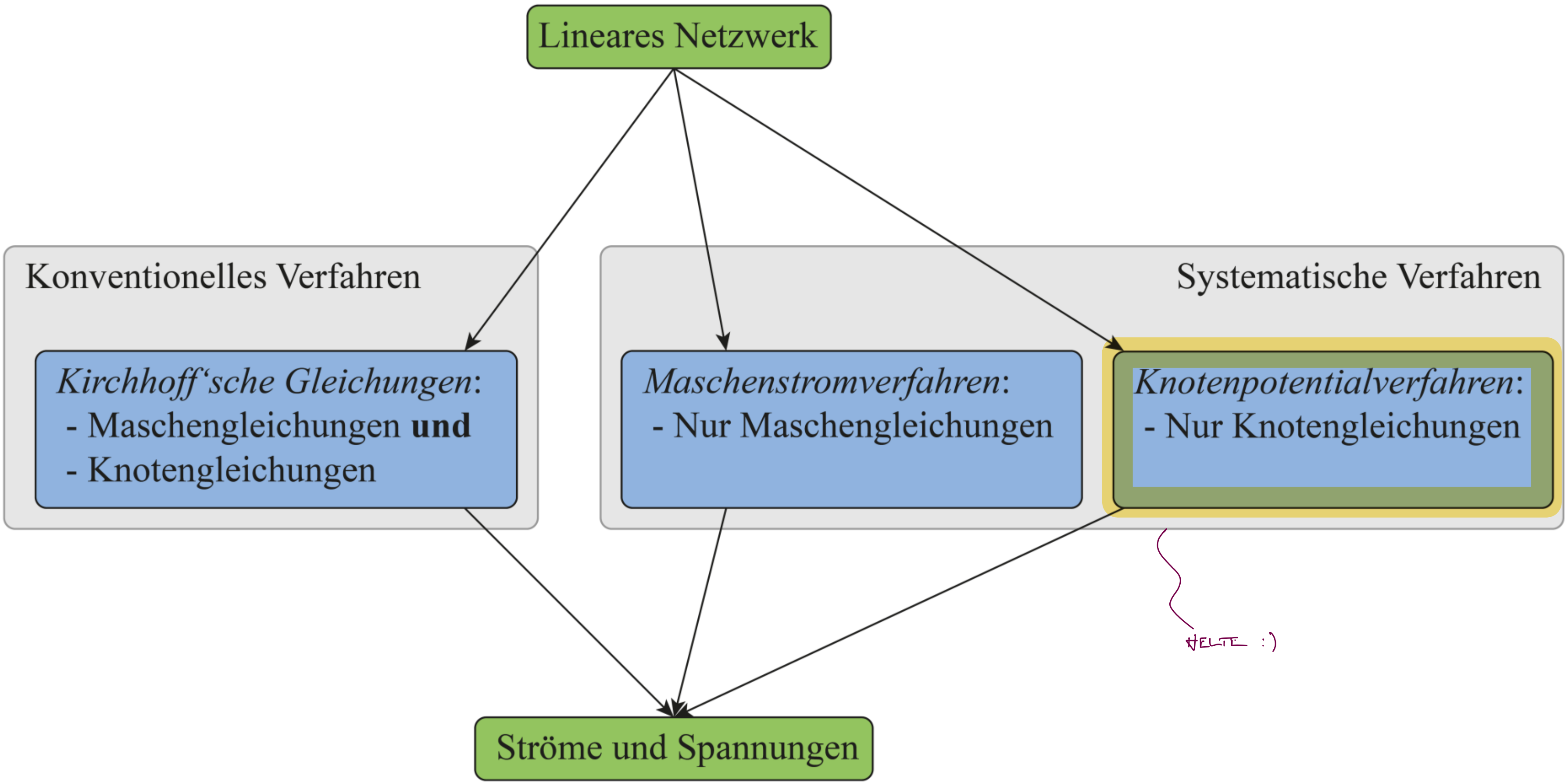


Kreuzungsfreies (ebenes) Netzwerk

Klassifizierung von Netzwerkelementen

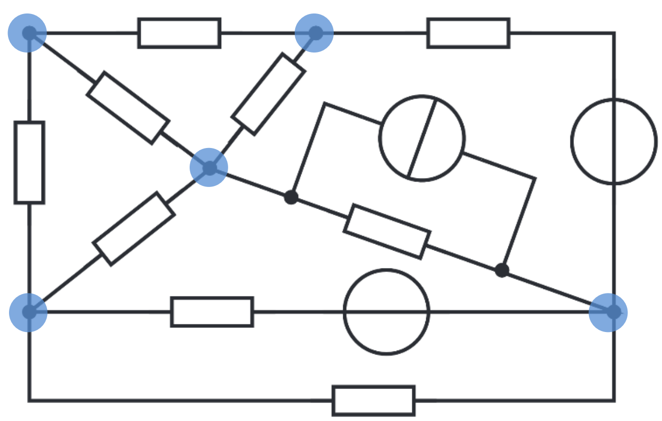
- Lineare Netzwerkelemente:
  - Widerstand
  - Induktivität
  - Kapazität
  - Unabhängige Quellen
  - Gesteuerte (abhängige) Quellen
  - Transformator (Übertrager)
- Nicht-lineare Netzwerkelemente (werden hier nicht behandelt)

Analyseverfahren von Netzwerken

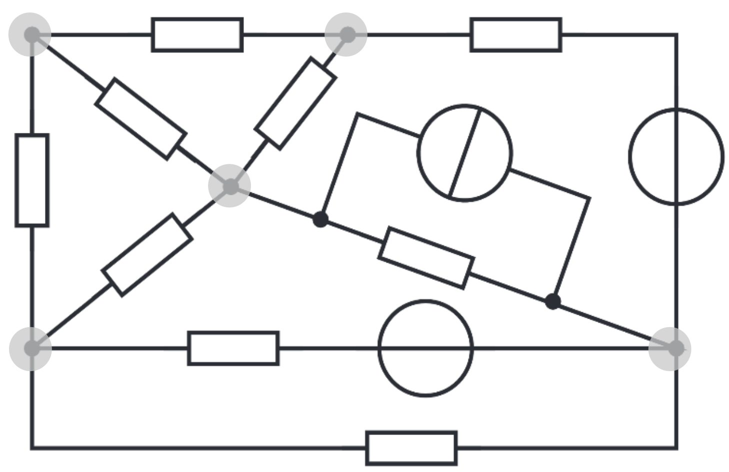


- Gegeben: Netzwerk mit K Knoten und Z Zweigen.
- Für die Berechnung der Z Zweiggrössen müssen
  - $K-1$ linear unabhängige Knotengleichungen **und**
  - $Z-(K-1)$ linear unabhängige Maschengleichungen aufgestellt werden.

- Beispielnetzwerk:
  - Netzwerk mit $K=5$ Knoten und $Z=9$ Zweigen
  - Konventionelles Verfahren: $(K-1)+Z-(K-1)=9$ Gleichungen

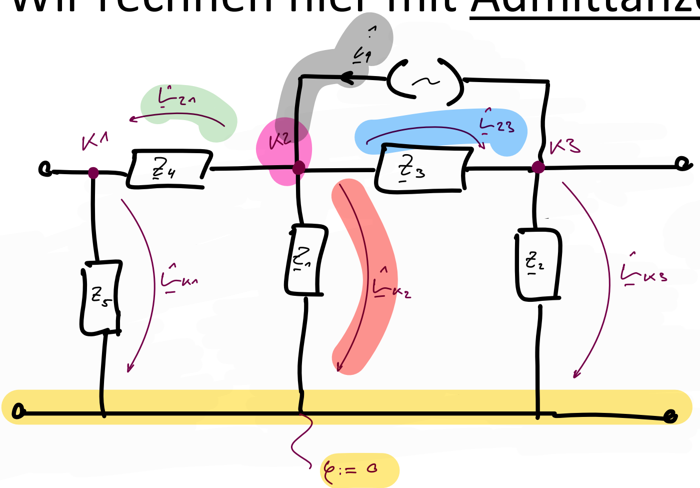


- Dual zum Maschenstromverfahren
- Idee: Die Anzahl Unbekannter durch das Einführen von Knotenspannungen zu reduzieren.
- Diese Knotenspannungen erfüllen die Maschengleichungen von vornherein.
- Bei einem Netzwerk mit K Knoten und Z Zweigen kann die Anzahl Gleichungen auf $K-1$ reduziert werden.



- Wahl eines beliebigen Bezugsknotens mit Potential $\varphi_0 = 0$.
  - Wahl Bezugsknoten: Zentraler Knoten mit vielen direkten Verbindungen zu anderen Knoten von Vorteil
- Weise jedem Knoten, ausser dem Bezugsknoten, eine unbekannte Knotenspannung zu
- Knotenspannung $u_{\mathrm{K}x}$ von Knoten *x* = Potenzial φ_x Knoten x – Bezugspotential φ_0
- $u_{\mathrm{K}x} = \varphi_x - \varphi_0$
- Zu jedem Knotenpotential wird eine Gleichung aufgestellt
- Wir rechnen hier mit <u>Admittanzen</u>, da wir Ströme berechnen wollen

BSP:



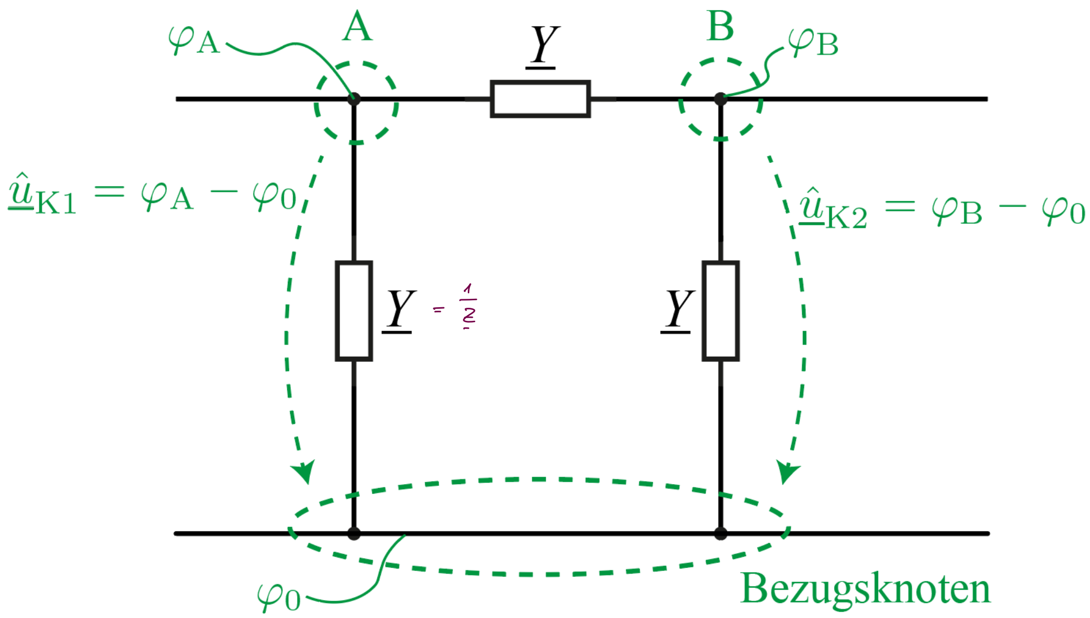
KNOTENGLEICHUNG FÜR KNOTEN K2...

$\Longrightarrow$ z.B. K2: $\frac{1}{Z_1}\left[\hat{u}_{K2}\right] + \frac{1}{Z_3}\left[\hat{u}_{K2} - \hat{u}_{K3}\right] + \frac{1}{Z_4}\left[\hat{u}_{K2} - \hat{u}_{K1}\right] - \hat{i}_q = 0$

$\Longleftrightarrow y_1 \cdot \left[\hat{u}_{K2}\right] + y_3\left[\hat{u}_{K2} - \hat{u}_{K3}\right] + y_4\left[\hat{u}_{K2} - \hat{u}_{K1}\right] - \hat{i}_q = 0$

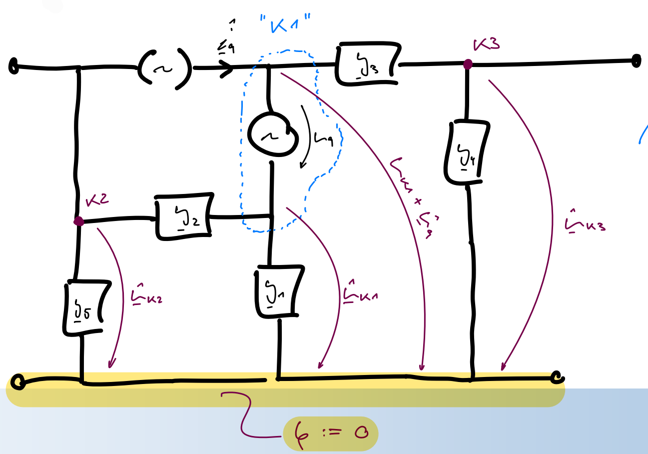
$\Longleftrightarrow$ .... MATRIX-GLEICHUNGSSYSTEM MIT $\begin{bmatrix} \hat{u}_{K1} \\ \hat{u}_{K2} \\ \hat{u}_{K3} \end{bmatrix}$ ALS UNBEKANNTENVEKTOR :)

- **Knotenspannungen = Potenzialdifferenzen zwischen Knotenpotenzial und Bezugsknotenpozial**
- **Sinnvollerweise wird Bezugsknotenpotenzial $\varphi_0 = 0$ gewählt**
- **Unterschied wichtig für Verständnis**



- Spannungsquellenwandlung: Umwandeln einer realen Spannungsquelle in eine äquivalente Ersatzstromquelle
- Spannungsquellenknoten
  - Für Knoten, die direkt über eine Spannungsquelle $\hat{\underline{u}}_q$ miteinander verbunden sind.
  - Hüllfläche um die beiden Knoten 1 und 2 legen
  - Die Knotenspannungen $\hat{\underline{u}}_{K1}, \hat{\underline{u}}_{K2}$ der beiden Knoten sind fest über $\hat{\underline{u}}_{K1} = \hat{\underline{u}}_{K2} + \hat{\underline{u}}_q$ miteinander verbunden. Damit ist nur noch eine Knotenspannung eine Unbekannte.
  - Knotengleichung für die gesamte Hüllfläche aufstellen.

Bsp:

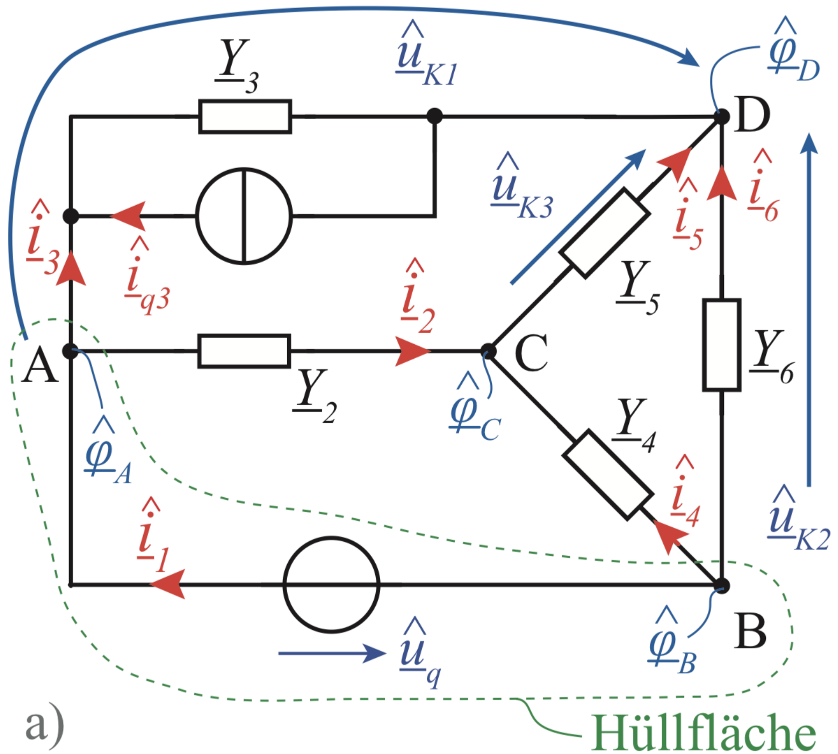


SUPERSPANNUNGSKNOTEN:

$$\underline{y}_1[\hat{\underline{u}}_{K1}] + \underline{y}_2[\hat{\underline{u}}_{K1} - \hat{\underline{u}}_{K2}] + \underline{y}_3[(\hat{\underline{u}}_{K1} + \hat{\underline{u}}_q) - \hat{\underline{u}}_{K3}] - \hat{\underline{i}}_q = 0$$

$\Longleftrightarrow$ .... MATRIX-GLEICHUNGSSYSTEM MIT $\begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_{K1} \\ \hat{\underline{u}}_{K2} \\ \hat{\underline{u}}_{K3} \end{bmatrix}$ ALS UNBEKANNTENVEKTOR :)

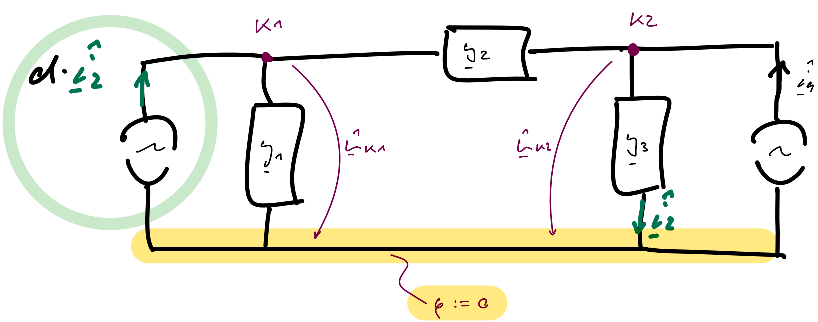
Spannungsquellenknoten = SUPERKNOTEN



<u>Eine</u> Knotengleichung für die Hüllfläche: $\underline{\hat{\imath}}_2 + \underline{\hat{\imath}}_3 + \underline{\hat{\imath}}_4 + \underline{\hat{\imath}}_6 = 0$

Zusammenhang Knotenspannungen: $\underline{\hat{u}}_{K1} = \underline{\hat{u}}_q + \underline{\hat{u}}_{K2}$

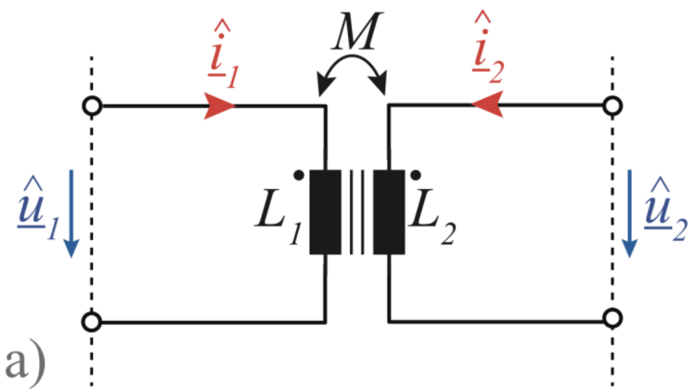
- Analog zum Maschenstromverfahren
- Gesteuerte Quellen beim Aufstellen des Gleichungssystems wie unabhängige Quellen behandeln.
- Anschliessend Steuergleichungen in Abhängigkeit der Knotenspannungen einsetzen.

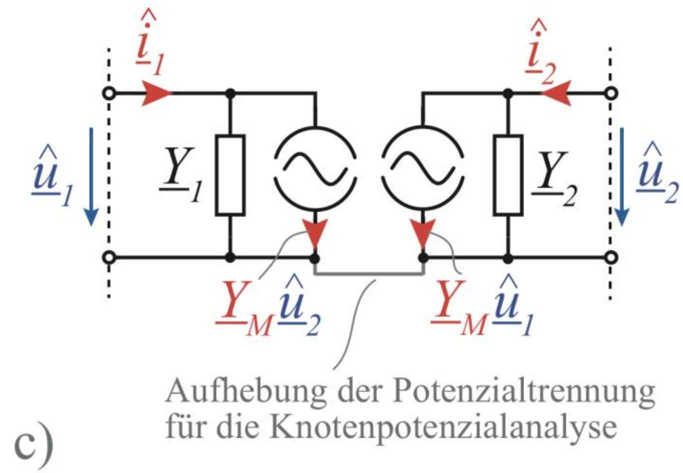


$\longrightarrow \alpha \cdot \underline{\hat{i}}_2 = \alpha \cdot \underline{y}_3 \cdot \underline{\hat{u}}_{K2}$ (THAT'S BASICALLY IT...)

$\Longrightarrow$ BEI GESTEUERTEN QUELLEN WIRD DIE ADMITTANZMATRIX ASYMMETRISCH!

- Transformator durch untenstehendes Ersatzschaltbild mit spannungsgesteuerten Stromquellen ersetzen.
- Potentialtrennung durch einen Kurzschluss auflösen, um die Anzahl Gleichungen zu reduzieren.





$$\underline{Y}_1 = \frac{L_2}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}$$

$$\hat{\underline{i}}_1 = \underline{Y}_1 \hat{\underline{u}}_1 + \underline{Y}_M \hat{\underline{u}}_2$$

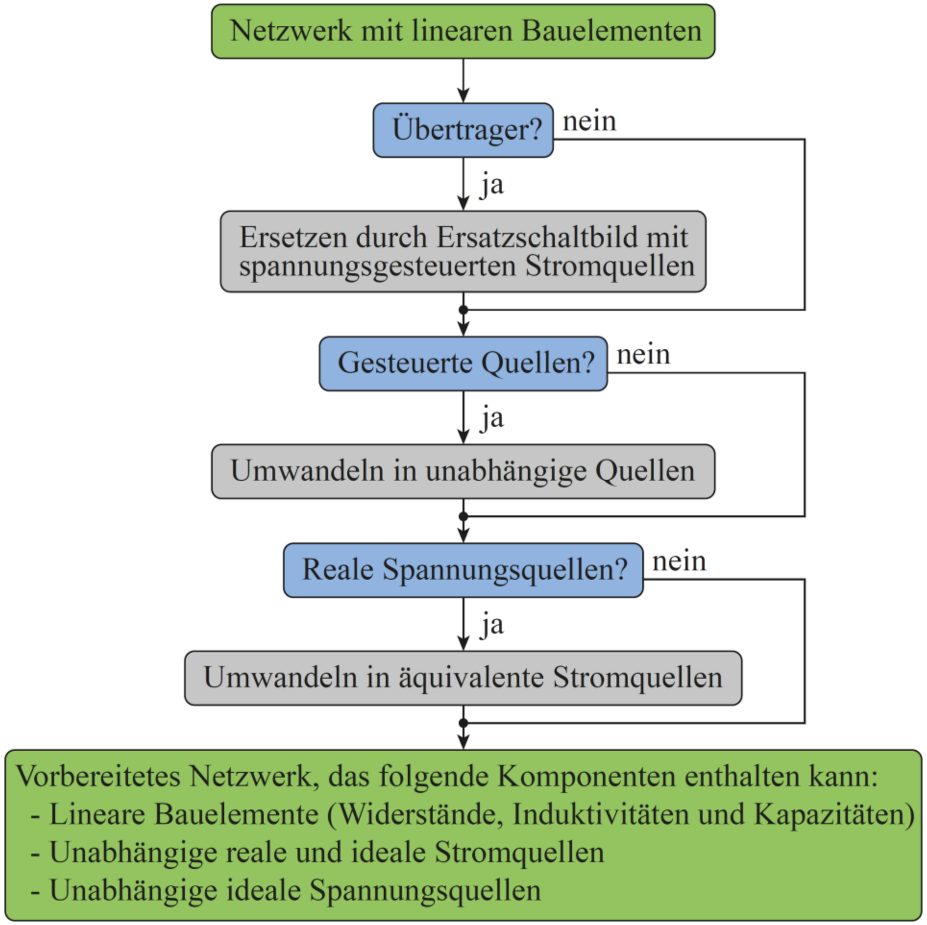
$$\underline{Y}_2 = \frac{L_1}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} \qquad \underline{Y}_M = \frac{-M}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}$$

$$\hat{\underline{i}}_2 = \underline{Y}_M \hat{\underline{u}}_1 + \underline{Y}_2 \hat{\underline{u}}_2$$

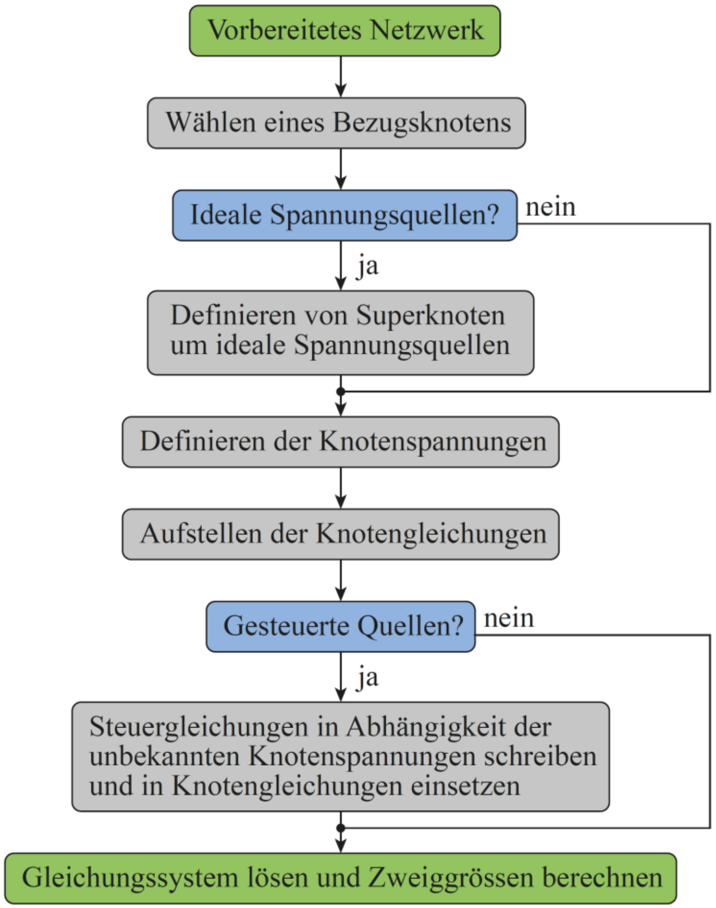
Vergleich Maschenstromverfahren und Knotenpotentialverfahren

Maschenstromverfahren	**Knotenpotenzialverfahren**
Reale Stromquelle – Umwandeln in äquivalente Spannungsquelle	Reale Spannungsquelle – Umwandeln in äquivalente Stromquelle
Übertrager: Ersetzen durch stromgesteuerte Spannungsquelle	Übertrager: Ersetzen durch spannungsgesteuerte Stromquelle
Berechnung von Maschenströmen	Berechnung von Knotenspannungen

Kochrezept – Vorbereiten des Netzwerks



Kochrezept – Anwenden des Knotenpotenzialverfahrens



Knotengleichungen lösen

- Mögliche Varianten das Gleichungssystem nach den Knotenpotentialen aufzulösen:
  - Einsetzungsverfahren
  - Elementare Zeilenumformungen (Gauss'sches Eliminationsverfahren)
  - **Matrixlösung**
- Anhand der berechneten Knotenpotentiale können anschliessend die gesuchten Zweiggrössen ermittelt werden.
- Formel für Matrixinversen:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix}}$$

VORGEHEN BEIM KNOTENPOTENTIALVERFAHREN

Vorgehen Knotenpotentialverfahren

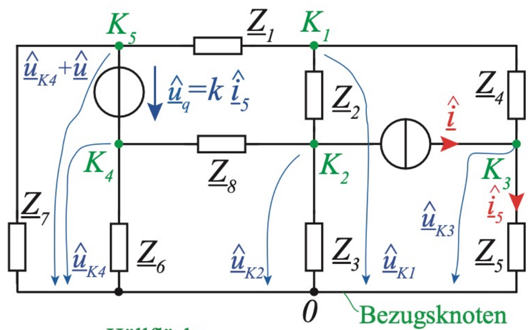
- Gesteuerte Quellen durch unabhängige Quellen ersetzen
- Transformatoren durch Ersatzschaltbild ersetzen
- Spannungsquellen behandeln
  - Realen Spannungsquellen in reale Stromquellen umwandeln
  - Spannungsquellenknoten (allgemein einfach anwendbar)
- Knotenspannungen definieren
- Pro Knotenpotential eine Knotengleichung aufstellen
  - Bei Spannungsquellenknoten nur für die Hüllfläche Knotengleichung aufstellen
- Gesteuerte Quellen durch Knotenspannungen ausdrücken
- Gleichungen in Matrixform anschreiben
- Mittels Matrixinverse der Admittanzmatrix (Formel für 2x2 und 3x3 Matrizen auf Zsmf.) Knotenspannungen berechnen
  - Achtet darauf, was gesucht ist – Welche Knotenspannung braucht man für die Lösung?
  - Oft braucht man nicht jedes Element der Inverse und/oder muss nicht jede Knotenspannung berechnen
- Keine gesteuerten Quellen ↔ Admittanzmatrix symmetrisch

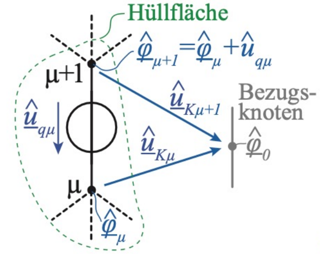
Was sagt die Zusammenfassung dazu?

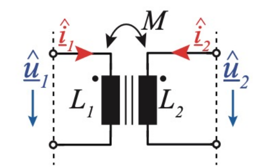
Knotenpotentialverfahren

1. **Vereinfachung**: Vor dem Aufstellen der Gleichungen evtl. Netzwerk vereinfachen und alle gesteuerten Quellen durch unabhängige Quellen ersetzen.
2. **Spannungsquellenwandlung**: Wandele alle realen Spannungsquellen jeweils zu einer realen Stromquelle um.
3. **Bezugsknoten**: Wähle einen beliebigen Bezugsknoten K_0 mit Potenzial $\underline{\hat{\varphi}}_0 = 0$.
4. **Hüllfläche**: Führe jeweils eine Hüllfläche um die beiden Netzwerkknoten ein, die direkt über eine ideale Spannungsquelle $\underline{\hat{u}}_{q\mu}$ verbunden sind.
5. **Knotenspannungen**: Weise jedem Knoten ausser dem Bezugsknoten eine Knotenspannung $\underline{\hat{u}}_{K\nu}$ zu. Bei den 2 Knoten, die von einer Hüllfläche umgeben sind, wird dem Knoten μ am Endpunkt des Bezugspfeils der Spannung $\underline{\hat{u}}_{q\mu}$ die Knotenspannung $\underline{\hat{u}}_{K\mu}$ und dem Knoten $\mu+1$ am Startpunkt des Bezugspfeils der Spannung $\underline{\hat{u}}_{q\mu}$ die abhängige Knotenspannung $\underline{\hat{u}}_{K\mu+1} = \underline{\hat{u}}_{K\mu} + \underline{\hat{u}}_{q\mu}$ zugewiesen.
6. **Knotengleichung**: Stelle für alle Knoten mit unabhängiger Knotenspannung $\underline{\hat{u}}_{K\nu}$ die Knotengleichung auf. Für die Knoten, die direkt mit einer Spannungsquelle verbunden sind, wird dabei die Knotengleichung für die Hüllfläche aufgestellt.
7. **Gleichungsumformung**: Umformen des Gleichungssystems:
   - Steuergleichungen der gesteuerten Quellen einsetzen
   - Alle bekannten Quellengrössen auf die "rechte" Seite der Gleichungen bringen
   - Sortieren der Gleichungen nach den Knotenspannungen

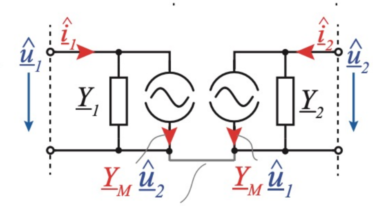
Anzahl der Gleichungen: $N_k = Knoten - 1$







Ersatzschaltbild eines Transformators für das Knotenpotenzialverfahren (ohne Potenzialtrennung)



$\underline{\hat{i}}_1 = \underline{Y}_1 \underline{\hat{u}}_1 + \underline{Y}_M \underline{\hat{u}}_2$

$\underline{\hat{i}}_2 = \underline{Y}_M \underline{\hat{u}}_1 + \underline{Y}_2 \underline{\hat{u}}_2$

$\underline{Y}_1 = \frac{L_2}{\mathrm{j}\omega(L_1L_2 - M^2)}$, $\underline{Y}_2 = \frac{L_1}{\mathrm{j}\omega(L_1L_2 - M^2)}$ und $\underline{Y}_M = \frac{-M}{\mathrm{j}\omega(L_1L_2 - M^2)}$

BEISPIELAUFGABEN

Aufgabe 1 Knotenpotenzialverfahren

Gegeben sei das folgende Netzwerk. Gegeben sind $\underline{\hat{u}}_{q1}$, $\underline{\hat{i}}_{q2}$, sowie die Admittanzen Y_n mit $n \in [1, 2, 3, 4, 5]$. Gesucht sind die Zweigspannungen und Zweigströme, die mittels Knotenpotenzialverfahren zu ermitteln sind.

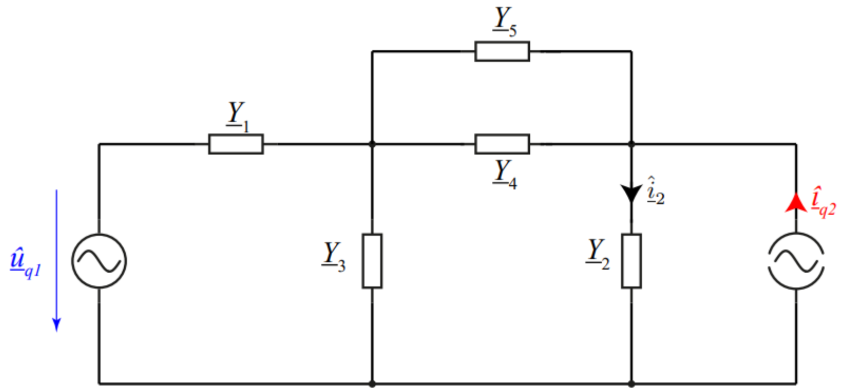


Abbildung 1: Gegebenes Netzwerk

a) Bereiten Sie das Netzwerk vor, um es mit dem Knotenpotenzialverfahren berechnen zu können.

b) Identifizieren Sie die Knoten des Netzwerks und bestimmen Sie einen geeigneten Referenzknoten. Weisen Sie den entsprechenden Knoten Knotenspannungen zu.

c) Berechnen Sie die Knotenspannungen.

d) Berechnen Sie den Strom $\underline{\hat{i}}_2$ durch die Admittanz $\underline{Y}_2$.

Aufgabe 2 Knotenpotenzialverfahren mit Transformator

Eine Impedanz $\underline{Z}$ ist über einen Transformator an eine reale Spannungsquelle $\hat{\underline{u}}_{q1}$ mit Innenimpedanz $\underline{Z}_i$ angeschlossen. Der Transformator weist eine primärseitige Induktivität L_1, eine sekundärseitige Induktivität L_2 und eine Kopplungsinduktivität M auf.

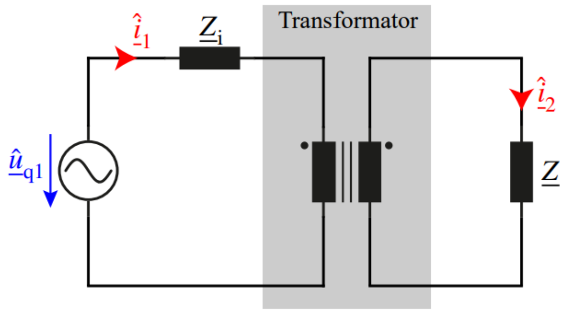


Abbildung 2: Mit dem Knotenpotenzialverfahren zu analysierendes Netzwerk mit realer Spannungsquelle, Transformator und Lastimpedanz.

a) Bereiten Sie das Netzwerk auf das Knotenpotenzialverfahren vor.

   – Leiten Sie das Ersatzschaltbild des Transformators her. Ersetzen Sie dazu zunächst den Trafo durch stromgesteuerte Spannungsquellen. Ersetzen Sie danach diese Spannungsquellen durch äquivalente spannungsgesteuerte Stromquellen.

   – Ersetzen Sie die weiteren Spannungsquellen.

b) Definieren Sie einen geeigneten Referenzknoten und stellen Sie die Knotengleichungen auf.

c) Berechnen Sie den Strom $\hat{\underline{i}}_2$ durch die Last.