ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Netzwerke und Schaltungen II

Übung 9
Superposition II, Fourierreihen

THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

Superposition bei Quellen mit verschiedenen Frequenzen

- **Das Superpositionsprinzip (Übung 6) funktioniert auch bei Netzwerken mit Quellen unterschiedlicher Frequenz.**
- **Achtung: Die Überlagerung darf nur im Zeitbereich stattfinden. Zeiger unterschiedlicher Frequenz dürfen nicht addiert werden, da sie mit unterschiedlicher Geschwindigkeit rotieren**
- **Konkrete Vorgehensweise:**
  - **Alle Quellen ausser einer aus Netzwerk entfernen. (Stromquellen -> Leerlauf, Spannungsquellen -> Kurzschluss)**
  - **Wechselgrösse der Quelle in komplexen Zeiger umwandeln.**

    $$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \phi) \Longrightarrow \underline{\hat{u}} = \hat{u}e^{j\phi}$$
  - **Gesuchte Spannung/Strom als Zeiger berechnen.**
  - **Zurücktransformieren in Zeitbereich!**
  - **Wiederholen für alle anderen Quellen.**
  - **Ganz zum Schluss: Die berechneten Teilspannungen/-ströme addieren. (Achtung: nicht Zeiger addieren!)**

Superposition bei Quellen mit verschiedenen Frequenzen

- **Berechnung von i(t):**
  - **Quelle 2 entfernen (siehe Abb. 2)**
  - **Umwandung in Zeiger**

cos ≙ 0°

$$\hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) \Longrightarrow \underline{\hat{u}}_1 = \hat{u}_1 e^{j0}$$

  - **Zeiger $\underline{\hat{i}}_1$ berechnen**

$$\underline{\hat{i}}_1 = \frac{\hat{u}_1}{j\omega_1 L} = \frac{\hat{u}_1}{\omega_1 L} e^{-j90^o}$$

  - **Zurücktransformieren**

$$i_1(t) = \frac{\hat{u}_1}{\omega_1 L} \cos(\omega_1 t - 90^o) = \frac{\hat{u}_1}{\omega_1 L} \sin(\omega_1 t)$$

  - **Wiederholen für Quelle 2, analog erhalten wir**

[...]

$$i_2(t) = \frac{\hat{u}_2}{\omega_2 L} \sin(\omega_2 t)$$

  - **Teilströme addieren**

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{\hat{u}_1}{\omega_1 L} \sin(\omega_1 t) + \frac{\hat{u}_2}{\omega_2 L} \sin(\omega_2 t)$$

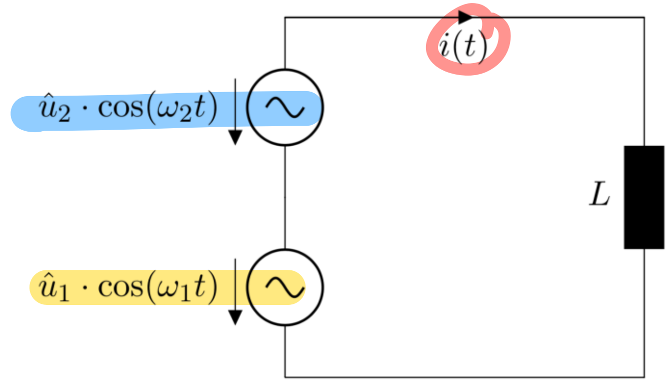


Abb. 1: Originales Netzwerk

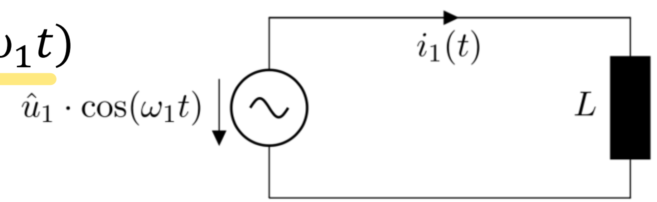


Abb. 2: Netzwerk ohne Quelle 2

- **Das selbe Vorgehen funktioniert auch bei Netzwerken mit Gleich- und Wechselgrössen.**

- **Um die Wechselanteile zu berechnen, verwenden wir wie gewohnt die komplexe Wechselstromrechnung.**

- **Wenn wir die Gleichanteile berechnen, werden**
  - **Spulen zu Kurzschlüssen.** $Z_L = 0$ $\quad \lim_{\omega \to 0} \underline{Z}_L = \lim_{\omega \to 0} j\omega L = 0$
  - **Kondensatoren zu Leerläufen.** $Z_C = \infty$ $\quad \lim_{\omega \to 0} \underline{Z}_C = \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{j\omega C} \simeq \infty$

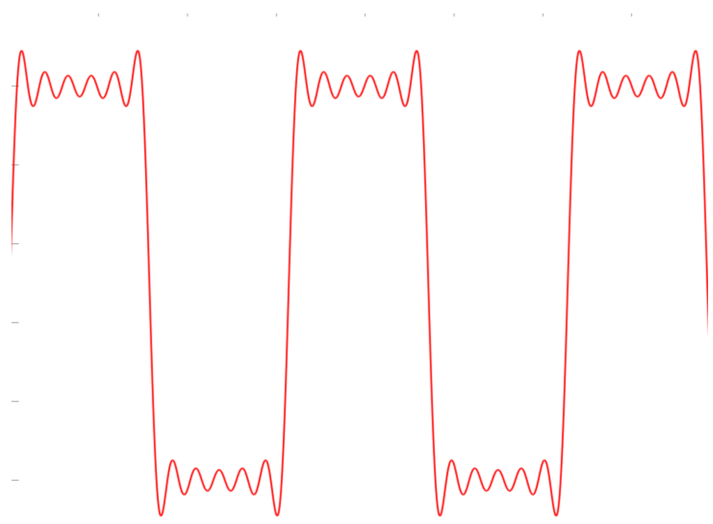
- **Darstellung einer beliebigen T-periodischen Funktion als Linearkombination von unendlich vielen Sinus und Kosinus Funktionen mit verschiedenen Frequenzen.**

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(\frac{2\pi k}{T} t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(\frac{2\pi k}{T} t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t) \cdot \cos(\frac{2\pi k}{T} t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t) \cdot \sin(\frac{2\pi k}{T} t) dt$$

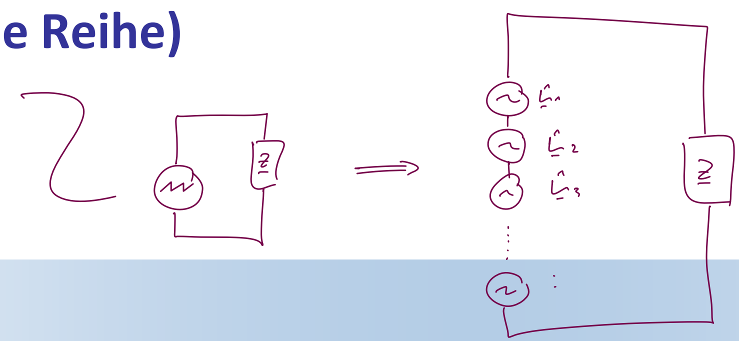
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t) dt$$



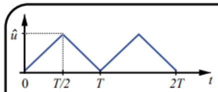
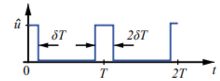
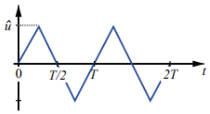
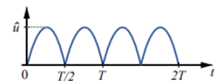
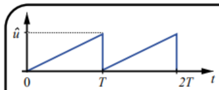
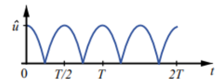
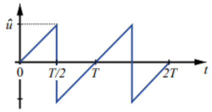
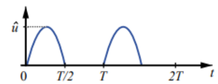
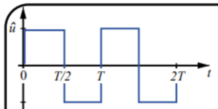
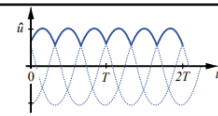
REMINDER : $\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega$

- **Ziel: Berechnung von RLC Netzwerken, die mit einer beliebigen periodischen Funktion (nicht Sinus/Kosinus) angeregt werden.**

- **Weg:**
  - **Wir benutzen die Fourierreihe, um die Input-Funktion als Linearkombination von Sinus/Kosinus Funktionen auszudrücken.**
  - **Quelle als Superposition dieser gefundenen Funktionen ausdrücken. (Achtung: unendlich viele)**
  - **Für jede Frequenz einzeln die Ausgangsspannung/strom berechnen. (Benutze komplexe Wechselstromrechnung)**
  - **Addition aller zuvor gefundenen Teil-ausgangsspannungen/ströme zur Gesamtausgangsspannung/strom im Zeitbereich. (Ergibt eine unendliche Reihe)**



Bekannte Fourierreihen aus Zusammenfassung

Zeitfunktion	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten	$u(t)$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u},\ \hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$, $n = 1, 3, 5, \ldots$	$u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega t) + \ldots\right]$
	$\hat{u}\sqrt{2\delta}$	$a_0 = 2\delta\hat{u}$, $\hat{a}_n = \frac{2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}\sin(n2\pi\delta)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$u(t) = 2\delta\hat{u} + \frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\sin(2\pi\delta)\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi\delta)\cos(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(6\pi\delta)\cos(3\omega t) + \ldots\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n+3}{2}}$, $n = 1, 3, 5, \ldots$	$u(t) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) - + \ldots\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi},\ \hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$, $n = 2, 4, 6, \ldots$	$u(t) = \hat{u}\lvert\sin(\omega t)\rvert$; $u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} + \ldots\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u},\ \hat{b}_n = \frac{-\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \ldots\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi},\ \hat{a}_n = \frac{4\hat{u}}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{(n+1)(n-1)}$, $n = 2, 4, 6, \ldots$	$u(t) = \hat{u}\lvert\cos(\omega t)\rvert$; $u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} + \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} - \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} - + \ldots\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) - + \ldots\right]$
	$\frac{\hat{u}}{2}$	$a_0 = \frac{\hat{u}}{\pi},\ \hat{a}_n = \frac{-2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$, $\hat{b}_1 = \frac{\hat{u}}{2}$, $n = 2, 4, 6, \ldots$	$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ für $0 \le t \le T/2$; $u(t) = \frac{\hat{u}}{\pi} + \frac{\hat{u}}{2}\sin(\omega t) - \frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} + \ldots\right]$
	$\hat{u}$	$\hat{b}_n = \frac{4\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}$, $n = 1, 3, 5, \ldots$	$u(t) = \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \ldots\right]$
	$\hat{u}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}}$	$a_0 = \frac{3\sqrt{3}\hat{u}}{2\pi}$, $\hat{a}_n = \frac{-3\sqrt{3}\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$, $n = 3, 6, 9, \ldots$	$u(t) = \frac{3\sqrt{3}\hat{u}}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(3\omega t)}{2\cdot 4} - \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} - \frac{\cos(9\omega t)}{8\cdot 10} - \ldots\right]$

Ausnutzen von Symmetrien

Symmetrien und Vereinfachungen

Gerade Funktionen

$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u(t)\,\mathrm{d}t,\qquad \hat{b}_n = 0$

$\hat{a}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$

$u(t) = u(-t)$ (→ Spiegelung an y-Achse)

Ungerade Funktionen

$a_0 = \hat{a}_n = 0$

$\hat{b}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$

$-u(t) = u(-t)$ (→ Punktspiegelung)

Halbwellensymmetrie $a_0 = \hat{a}_{2n} = \hat{b}_{2n} = 0$

$u(t) = -u(t+T/2)$

$\hat{a}_{2n-1} = \frac{2}{T}\int_0^{T} u(t)\cos((2n-1)\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos((2n-1)\omega t)\,\mathrm{d}t$

$\hat{b}_{2n-1} = \frac{2}{T}\int_0^{T} u(t)\sin((2n-1)\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin((2n-1)\omega t)\,\mathrm{d}t$

Gerade Fkt. mit Halbwellensymmetrie

$a_0 = \hat{a}_{2n} = \hat{b}_n = 0$

$\hat{a}_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} u(t)\cos((2n-1)\omega t)\,\mathrm{d}t$

$u(t) = u(-t) = -u(t+T/2)$

Ungerade Fkt. mit Halbwellensymmetrie

$a_0 = \hat{a}_n = \hat{b}_{2n} = 0$

$\hat{b}_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} u(t)\sin((2n-1)\omega t)\,\mathrm{d}t$

$u(t) = -u(-t) = -u(t+T/2)$

Oft nützlich zur Berechnung: Partielle Integration

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Leistung mit Fourierreihen berechnen / Kenngrössen

Leistung nichtsinusförmiger Grössen ($\hat{a}_n$ & $\hat{b}_n$ – Spitzenwerte bei der n-ten Harmonischen)

Effektivwert $U = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2\right)}$

Wirkleistung [W] $P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,\mathrm{d}t$

$= U_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{u}_n \hat{i}_n \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n})\right)$

Orthogonalität $(n, m \in \mathbb{N}^+)$

$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t = 0$ für $m \neq n$

$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$ für $m = n$

$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t = 0$ für $m \neq n$

$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$ für $m = n$

$\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t = 0$

Kenngrössen nichtsinusförmiger Verläufe (U_n – Effektivwert der n-ten Harmonischen)

Effektivwert des Wechselanteils $U_\sim$	$U_\sim = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2} = \sqrt{U^2 - U_0^2}$
Grundschwingungsgehalt g $(0 \leq g \leq 1)$	$g = \frac{U_1}{U_\sim}$
Gesamtklirrfaktor k $(0 \leq k \leq 1)$	$k = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}}{U_\sim} = \frac{\sqrt{U_\sim^2 - U_1^2}}{U_\sim} = \sqrt{1-g^2} = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} k_n^2}$
Total Harmonic Distortion (THD)	$THD = (\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2})/U_1 = k/\sqrt{1-k^2}$
Scheitelfaktor ξ	$\xi = \frac{\hat{u}}{U_\sim}$
Formfaktor F	$F = \frac{U_\sim}{\lvert\overline{u}\rvert}$
Welligkeit w	$w = \frac{U_\sim}{\lvert U_0 \rvert}$

- **Warum haben Spannungen/Ströme unterschiedlicher Harmonischer keinen Einfluss auf die Leistung?**

- **Spannungen/Ströme verschiedener Harmonischen haben keinen Einfluss auf die Leistung!**
- **Grund:**

Orthogonalität	$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t = 0$ für $m \neq n$
$(n, m \in \mathbb{N}^+)$	$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$ für $m = n$
	$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t = 0$ für $m \neq n$
	$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$ für $m = n$
	$\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t = 0$

BEISPIELAUFGABEN

Beispielaufgabe 1

Gegeben ist das einfache Netzwerk in Abbildung 1, das mit Hilfe des Überlagerungsprinzips berechnet werden soll. Berechnen Sie alle Grössen zuerst analytisch und dann mit eingesetzten Zahlenwerten und Einheiten. Folgende Zahlenwerte sind gegeben:
$U_{\mathrm{DC}} = 5\,\mathrm{V}$, $\hat{u}_{\mathrm{AC}} = 10\,\mathrm{V}$, $R = 20\,\Omega$, $L = 15\,\mathrm{mH}$, $f = 100\,\mathrm{Hz}$

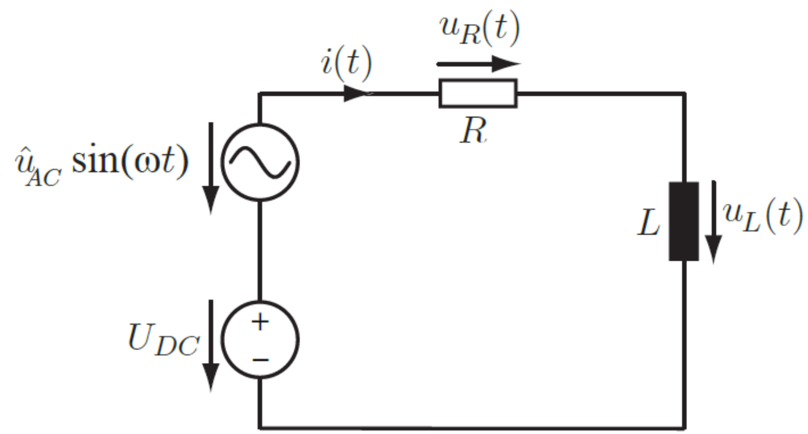


Abbildung 1: Netzwerk mit Gleich- und Wechselspannungsquelle

(a) Berechnen Sie den Strom I_{DC}, der sich zufolge der Gleichspannungsquelle einstellt.

(b) Berechnen Sie den Strom $i_{AC}(t)$, der sich zufolge der Wechselspannungsquelle einstellt.

(c) Bestimmen Sie daraus den Gesamtstrom $i(t)$, der in dem Netzwerk fliesst.

Beispielaufgabe 2

a.) Berechne die Fourierkoeffizienten des folgenden Signals $u(t)$

b.) Berechne den Strom $i(t)$ im Netzwerk