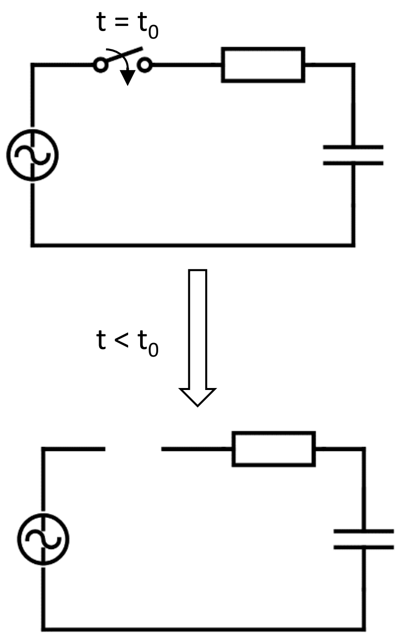
ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

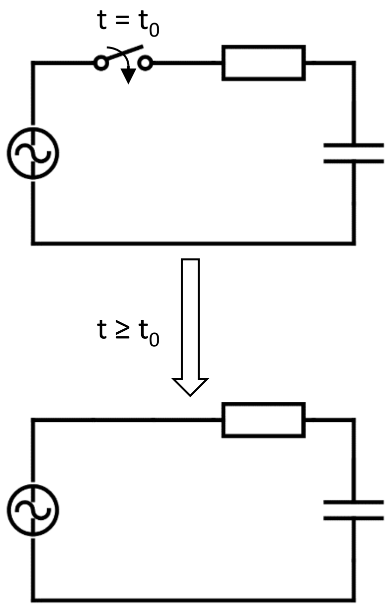
Netzwerke und Schaltungen II

Übung 10
Schaltvorgänge in RLC-Netzwerken

THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

- **Bisher: Analyse von linearen Netzwerken mit sinusförmiger Anregung (mit Mitteln der komplexen Wechselstromrechnung) oder konst. Anregung.**
- **Neu: Schaltvorgänge**





Vorgehensweise bei Schaltvorgängen

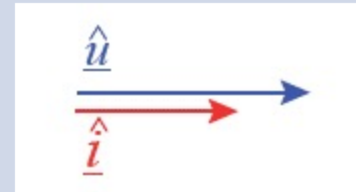
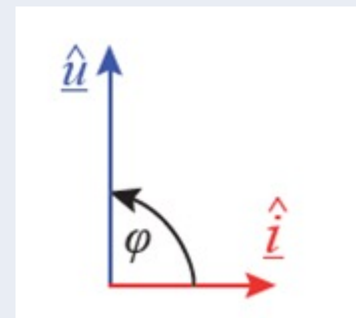
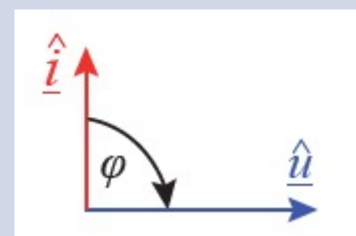
- **Aufstellen der (linearen) DGL der Schaltung bei geschl. Schalter**
  - **1.: Maschengleichung (bei Serienschaltung) oder Knotengleichung (bei Parallelschaltung) aufstellen**
  - **2.: Strom-Spannungs-Relation für die einzelnen Komponenten (R, L, C) im Netzwerk aufstellen**
  - **3.: Die Gleichung aus 1. mit Hilfe der Relationen aus 2. nur durch die interessierende Grösse ($u_C(t)$ oder $i_L(t)$) und ihre Ableitungen ausdrücken**

- **Die Lösung setzt sich zusammen aus $f(t) = f_h(t) + f_p(t)$**
- **$f_h(t)$ beschreibt den Schaltvorgang**
- **$f_p(t)$ beschreibt die Lösung für $t \to \infty$ (eingeschwungener Zustand)**

  -> bekannte Netzwerkberechnung

***Bemerkung*: Bei komplexeren Netzwerken müssen mehrere Maschen-/Knotengleichungen aufgestellt werden, sodass am Ende ein ganzes System an DGLs zu lösen ist.**

Wiederholung: Strom-Spannungs-Relationen der Bauelemente R, L, C

Bauelement	Zeitbereich	Bildbereich	Zeigerdiagramm
Widerstand	$\boldsymbol{u_R = R \cdot i_R}$	$\underline{\hat{u}}_R = R \cdot \underline{\hat{\imath}}_R$	
Induktivität	$\boldsymbol{u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}}$	$\underline{\hat{u}}_L = j\omega L \cdot \underline{\hat{\imath}}_L$	
Kondensator	$\boldsymbol{u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C dt}$ $\boldsymbol{i_C = C \cdot \frac{du_c}{dt}}$	$\underline{\hat{u}}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{\hat{\imath}}_C$ $= -\frac{j}{\omega C} \cdot \underline{\hat{\imath}}_C$	

- **Falls das Netzwerk aus <u>einer Kapazität</u> und sonst nur aus mind. einem Widerstand besteht, gilt:**

$$u_C(t) = u_{C,p}(t) - [u_{C,p}(t_0) - u_C(t_0)]e^{-\frac{t-t_0}{R_{in,C} \cdot C}}$$

Wert der Partikulären (stationären) Lösung bei $t = t_0$

Anfangswert

Innenwiderstand, von der Kapazität aus betrachtet bei geschl. Schalter

- **Falls das Netzwerk aus <u>einer Induktivität</u> und sonst nur aus mind. einem Widerstand besteht, gilt:**

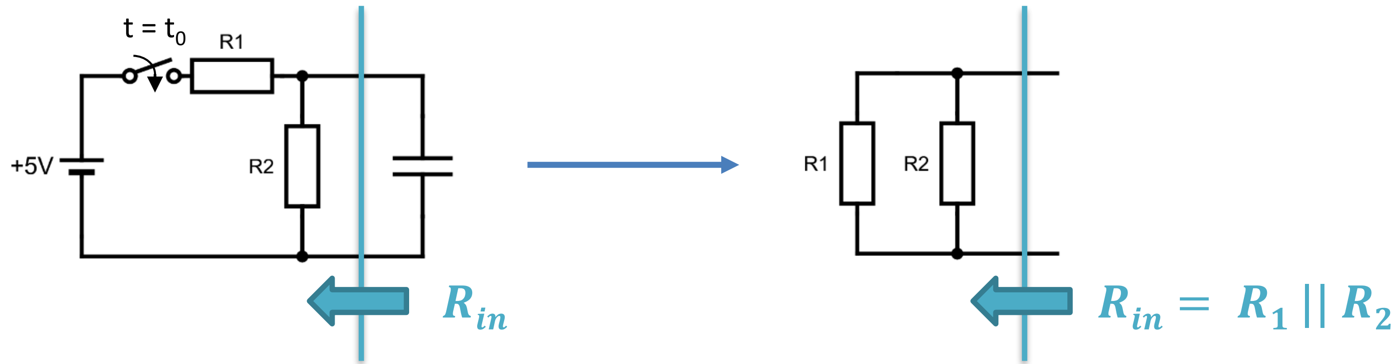
$$i_L(t) = i_{L,p}(t) - [i_{L,p}(t_0) - i_L(t_0)]e^{-R_{in,L}\frac{t-t_0}{L}}$$

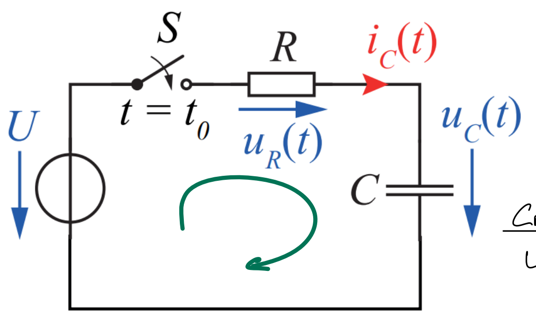
WARUM?

SEHEL LVR HELSE :)

Berechnungshinweise zu Netzwerken mit einem Energiespeicher

- **Anfangsbedingung/-wert (Wert von u_C bzw. i_L bei $t = t_0$) bestimmen:**
  - Da $u_C(t)$ und $i_L(t)$ stetig sind, ist ihr Anfangswert gerade der Wert bei offenem Schalter zum Zeitpunkt t_0 (D.h. wir führen unsere gewohnten Berechnungen bei der Schaltung mit offenem Schalter durch)
- **Innenwiderstand:**
  - Berechnung bei geschl. Schalter
  - Spannungsquellen werden zu Kurzschlüssen
  - Stromquellen werden zu Leerläufen





Gegeben:

$U_C(t_0) = U_0$

1) Widerstand ist in Serie zu Kondensator ⟶ Maschengleichung

$\rightsquigarrow U = U_R(t) + U_C(t)$

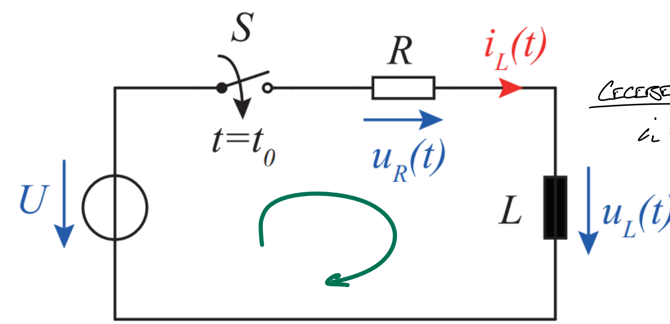
mit $U_R(t) = R \cdot i_C(t) = R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} U_C(t)$

$$\boxed{U = R \cdot C \cdot \dot{U}_C(t) + U_C(t)}$$

DGL :)

Bzw:

$$\begin{cases} \dot{U}_C(t) + \frac{1}{R \cdot C} U_C(t) = \frac{U}{R \cdot C} \\ U_C(t_0) = U_0 \end{cases}$$



Gegeben:

$i_L(t_0) = i_{L0}$

1) Widerstand ist in Serie zu Induktivität ⟶ Maschengleichung

$\rightsquigarrow U = U_R(t) + U_L(t)$

$$\boxed{U = R \cdot i_L(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)}$$

DGL :)

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} i_L(t) + \frac{R}{L} i_L(t) = \frac{U}{L} \\ i_L(t_0) = i_{L0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_c(t) + \frac{1}{R\cdot C} u_c(t) = \frac{u}{R\cdot C} \\ u_c(t_0) = u_0 \end{cases}$$

HIER: KONSTANTE STÖRFUNKTION

FÜR $t \to \infty$ HABEN WIR NUR u ÜBER C

PARTIKULÄRE LÖSUNG: $\boxed{u_{c,p}(t) = u}$

HOMOGENE LÖSUNG: $\dot{u}_c(t) + \frac{1}{R\cdot C} u_c(t) = 0$

$$CHP(\lambda) = \lambda + \frac{1}{RC} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-1}{RC}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{u_{c,H}(t) = K \cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C} t}}$$

EXPONENTIAL-ANSATZ ...

$$\rightsquigarrow \quad u_c(t) = u_{c,p}(t) + u_{c,H}(t)$$
$$= u + K \cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C} t}$$

$\rightsquigarrow$ MIT ANFANGSBEDINGUNG:

$$u_c(t_0) = u_0 = u + K \cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C} t_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad K = [u_0 - u]\, e^{\frac{1}{R\cdot C} t_0}$$

$$u_c(t) = u + [u_0 - u] \cdot e^{\frac{1}{R\cdot C} t_0} \cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C} t}$$
$$= u - [u - u_0] \exp\left[-\frac{t - t_0}{RC}\right]$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i_L(t) + \frac{R}{L} i_L(t) = \frac{u}{L} \\ i_L(t_0) = i_{L0} \end{cases}$$

HIER: KONSTANTE STÖRFUNKTION

FÜR $t \to \infty$ HABEN WIR $\frac{u}{R}$ DURCH L

PARTIKULÄRE LÖSUNG: $i_{L,p}(t) = \frac{u}{R}$

HOMOGENE LÖSUNG: $\frac{d}{dt} i_L(t) + \frac{R}{L} i_L(t) = 0$

$$CHP(\lambda) = \lambda + \frac{R}{L} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-R}{L}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{i_{L,H}(t) = K e^{-\frac{R}{L} t}}$$

EXPONENTIAL-ANSATZ ...

$$\rightsquigarrow \quad i_L(t) = i_{L,p}(t) + i_{L,H}(t)$$
$$= \frac{u}{R} + K e^{-\frac{R}{L} t}$$

$\rightsquigarrow$ MIT ANFANGSBEDINGUNG:

$$i_L(t_0) = i_{L0} = \frac{u}{R} + K e^{-\frac{R}{L} t_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad K = \left[i_{L0} - \frac{u}{R}\right] \exp\left[\frac{R}{L} t_0\right]$$

$$i_L(t) = \dots$$
$$= \frac{u}{R} - \left[\frac{u}{R} - i_{L0}\right] \exp\left[-\frac{(t - t_0)R}{L}\right]$$

DGL höherer Ordnung lösen

- **Systeme mit mehr als einem Energiespeicher führen zu DGL höherer Ordnung:** $f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f^{(1)} + a_0 f = g$
- **Suchen eine Lösung der Form** $f(t) = f_h(t) + f_p(t)$
- $f_p(t)$ **wählen wir als die partikuläre Lösung der Schaltung bei geschlossenem Schalter. Dies entspricht der stationären Lösung für** $t \to \infty$**.**
- **Die homogene Lösung ist eine Superposition** $\sum_i c_i \mathbf{e}^{\lambda_i t}$**, wobei** λ_i **die Nullstellen des charakteristischen Polynoms** $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ **sind.**
  - **Bei einer k-fachen Nullstelle muss „**c_i**“ durch ein Polynom des Grades** $\boldsymbol{k-1}$ **ersetzt werden (Bsp.:** $\lambda = \mathbf{4}$ **ist 3-fache Nst., dann ist der entspr. Lösungsterm** $(b_1 + b_2 t + b_3 t^2)\mathbf{e}^{4t}$ **)**
  - **Die Lösungsterme von komplexen Nst. kann man nach Euler in folgende Form umschreiben:**
    $C_1\mathbf{e}^{(\alpha+\mathbf{i}\beta)t} + C_2\mathbf{e}^{(\alpha-\mathbf{i}\beta)t} \;\to\; c_1'\mathbf{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2'\mathbf{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$
- **Die Konstanten** c_i **können mit den Anfangsbedingungen bestimmt werden**

BEISPIELAUFGABE

Aufgabe 1 Aufladen eines Kondensators

Ziel der Aufgabe ist es, die Ladekurve $u_C(t)$ eines Kondensators nach dem Umschalten von einer Spannungsquelle U_0 zu einer andere Spannungsquelle U zu bestimmen. Der Schalter werde dabei zum Zeitpunkt $t = t_0$ umgeschalten. Es gilt $U > U_0$.

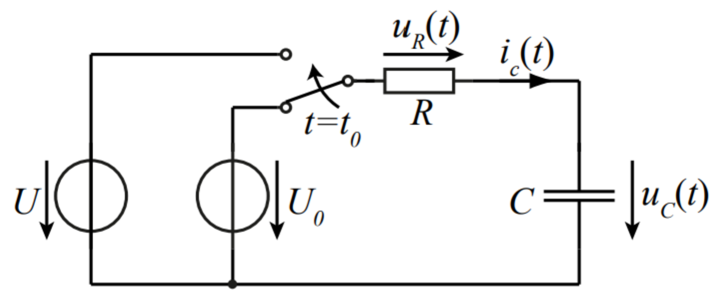


Abbildung 1: Netzwerk mit ohmsch-kapazitiver Last

1.1) Bestimmen Sie den Anfangs- und Endzustand (zu den Zeitpunkten $t = t_0$ resp. $t \to \infty$) der Spannung $u_C(t)$. Gehen Sie davon aus, dass der Schalter bereits sehr lange in der dargestellten Position war.

1.2) Bestimmen Sie den Spannungsverlauf $u_C(t)$.