ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Netzwerke und Schaltungen II

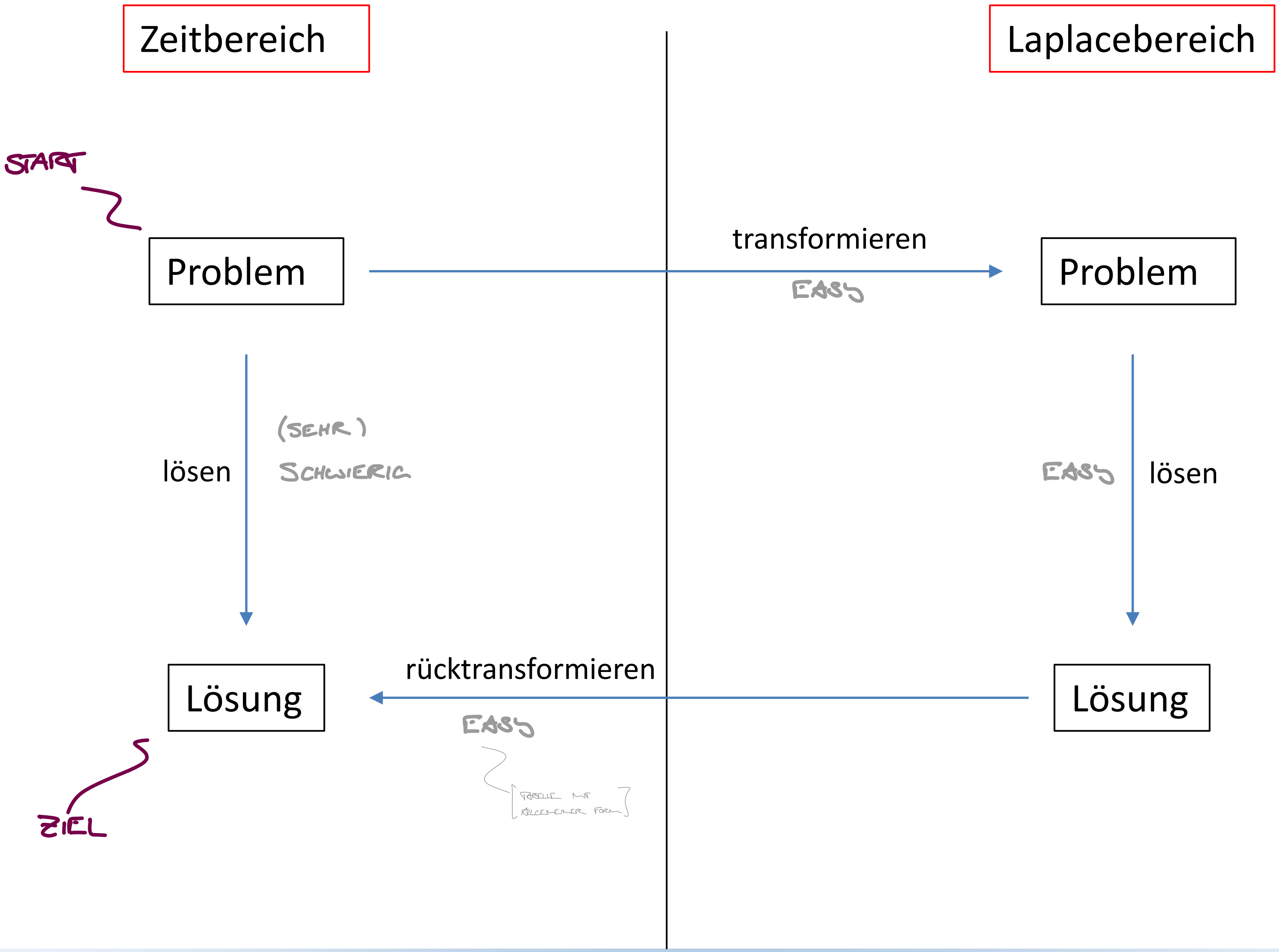
Übung 11
Netzwerksberechnung mit Laplace-Transformation

THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

Motivation I

- **Analyse von beliebigen Signalen**
  - **Signale müssen nicht periodisch sein**
  - **Idealerweise ist die Laplace-Transformation der Anregung bekannt**
- **Warum Laplace**
  - **Integration und Ableitungen sind einfacher im Bildbereich** = LAPLACEBEREICH
  - **Anwendung über elektrische Schaltungen hinaus möglich**

Motivation II



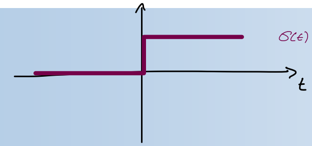
Laplacetransformation Definition

· LINEARER OPERATOR : $\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$

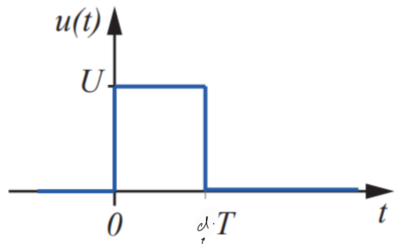
$\mathcal{L}\{\alpha \cdot f(t)\} = \alpha \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$ [α = const.]

- **Transformation:** $\underline{U}(s) = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt$
- **Rücktransformation:** $u(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_0^\infty \underline{U}(s)e^{st}dt$
- **Ihr müsst hier keine Integrale berechnen, benützt die Transformationstabelle der Zusammenfassung:**

$u(t)$ ZEITBEREICH		$\underline{U}(s)$ LAPLACE BEREICH	$u(t)$		$\underline{U}(s)$
$u(at),\ a>0$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{a}\underline{U}(\frac{s}{a})$	$\lambda\, u(t)+\mu\, v(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\lambda\, \underline{U}(s)+\mu\, \underline{V}(s)$
$u(t-t_0)$	$\circ\!-\!\bullet$	$e^{-st_0}\,\underline{U}(s)$	$e^{-at}\ u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}(s+a)$
$-t\,u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}'(s)$	$t^2\,u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}^{(n)}(s)$			
$u'(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s\,\underline{U}(s)-u(0)$	$u''(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s^2\underline{U}(s)-s\,u(0)-u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s^n\underline{U}(s)-s^{n-1}u(0)-s^{n-2}u'(0)-\ldots-u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau)\,d\tau$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}\underline{U}(s)$	period. mit T	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T u(t)e^{-st}\,dt$
$\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1-e^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$ * BEISPIELAUFGABE :)
$\frac{1}{\tau^2}\,t\,e^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(e^{-t/\tau_1}-e^{-t/\tau_2}\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\mathrm{ramp}(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t>0\end{cases}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t-\tau+\tau e^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sigma(t) =$ $E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$			

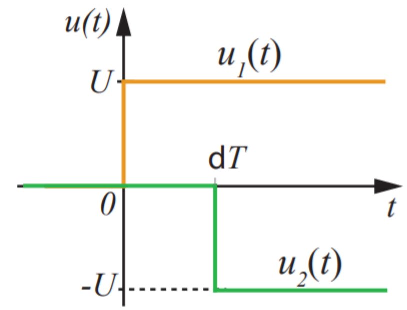


Zerlegung von Funktionen in bekannte Einzelfunktionen



(a)

Zerlegung $\Longrightarrow$



(b)

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad U(s) = U_1(s) + U_2(s)$$

$$= -e^{-s\,dT} \cdot \frac{U}{s} + \frac{U}{s}$$

$$u_1(t) = \sigma(t) \cdot U \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad U_1(s) = \mathcal{L}\{\sigma(t) \cdot U\} = \frac{U}{s}$$

$$u_2(t) = -\sigma(t - dT) \cdot U \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad U_2(s) = \mathcal{L}\{-\sigma(t - dT) \cdot U\}$$

$$= -e^{-s\,dT} \cdot \frac{U}{s}$$

"LR NORMAL LIFE" "THE DARK SIDE :)"

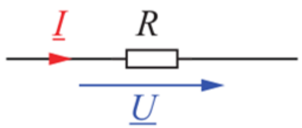
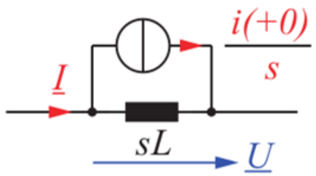
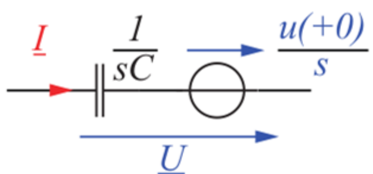
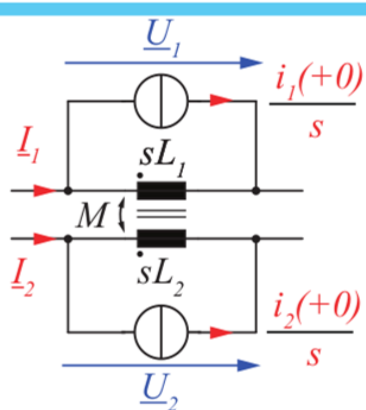
TABELLE / ABBACH / PAPS :)

Vorgehen

- **Differeintialgleichung Aufstellen**
  - **Widerstand:** $\mathrm{u}(\mathrm{t}) = R \cdot i(t)$
  - **Kondensator:** $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad C \cdot \left[s \cdot U(s) - U(0) \right]$
  - **Induktivität:** $\mathrm{u}(\mathrm{t}) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$
- **Gleichung in Laplace-Bereich transformieren**
  - $\mathrm{u}(\mathrm{t}), i(t) \quad \rightarrow \quad U(s), I(s)$
  - $\frac{df(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad s \cdot F(s) - f(t = 0)$
  - $\int_0^t f(\tau) d\tau \quad \rightarrow \quad \frac{F(s)}{s}$
- **Gleichung im Laplace-Bereich lösen**
- **Lösung zurücktransformieren**
  - **Verwende Laplace-Tabelle aus der Zusammenfassung**

Bauteile im Bildbereich

AKA LAPLACEBEREICH

Komponente	Spannung	Strom
	$\underline{U}=R\underline{I}$	$\underline{I}=\underline{U}/R$
	$\underline{U}=sL\underline{I}-Li(+0)$	$\underline{I}=\frac{1}{sL}\underline{U}+\frac{i(+0)}{s}$
	$\underline{U}=\frac{1}{sC}\underline{I}+\frac{u(+0)}{s}$	$\underline{I}=sC\underline{U}-Cu(+0)$
	**Transformator-Gleichungen** $\underline{U}_1(s)=sL_1\underline{I}_1(s)-L_1i_1(+0)+sM\underline{I}_2(s)-Mi_2(+0)$ $\underline{U}_2(s)=sM\underline{I}_1(s)-Mi_1(+0)+sL_2\underline{I}_2(s)-L_2i_2(+0)$	

$= \text{"}\frac{1}{Z}\text{"}$ mit $s := j\omega$

BEISPIELAUFGABE

Gegeben ist die Schaltung in Abb.1, bestehend aus einem RC-Glied und einer Spannungsquelle U. Zum Zeitpunkt $t < 0$ befindet sich der Schalter S in der Position 0 und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ nach Position 1 geschaltet.
Nach der Zeit $t = dT$ geht der Schalter wieder zurück in die Position 0 und nach einer Periode T beginnt das Schaltprozedere von neuem, so dass sich die Spannung $u_i(t)$ wie in Abb.2 gezeigt, ergibt. Folgende Zahlenwerte sind gegeben:
$U_0 = 1\text{V}$, $R = 10\text{k}\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$, $T = 0.1\text{s}$, $d = 0.5$

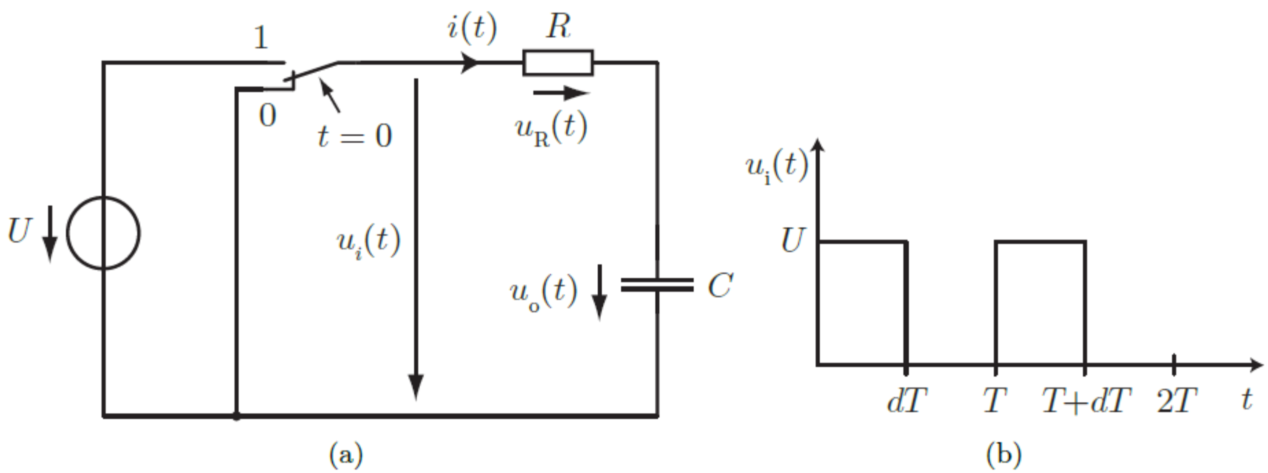


Abbildung 1: 1(a) RC-Schaldung, 1(b) Spannungsverlauf $u_i(t)$

Berechnen Sie den Spannungsverlauf $u_o(t)$ für den Zeitraum $0 < t < T$ mit Hilfe der Laplace-Transformation unter der Annahme, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ der Kondensator entladen ist.