ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Netzwerk und Schaltungen II

Übung 12
Netzwerkberechnung mit Laplace-Transformation II

THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

1. Differentialgleichungen im Zeitbereich aufstellen

- Widerstand: $u_R(t) = R \cdot i_R(t)$
- Induktivität: $u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$
- Kondensator: $i_C(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$

2. Gleichungen in den Laplace-Bereich transformieren

- Option 1 (Meistens sehr aufwendig):

  Laplace-Transformation von Hand mit dem Integral

$$\mathrm{F(s)} = \mathcal{L}\{\mathrm{f(t)}\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

- Option 2 (Einfacher):

  Laplace-Transformation mit der Korrespondenztabelle

  Abb 1. (zbs. in der NUSII Zmf.)

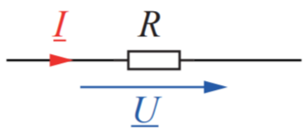
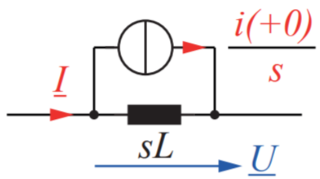
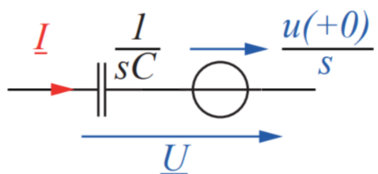
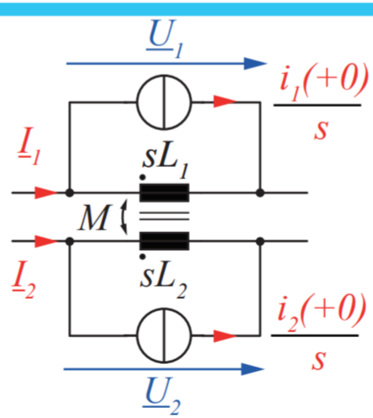
3. Gleichung im Laplace-Bereich lösen

4. Die Lösung mit der Tabelle zurücktransformieren

$u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}(s)$	$u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}(s)$
$u(at)$, $a>0$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{a}\,\underline{U}(\frac{s}{a})$	$\lambda\, u(t) + \mu\, v(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\lambda\, \underline{U}(s) + \mu\, \underline{V}(s)$
$u(t-t_0)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\mathrm{e}^{-st_0}\, \underline{U}(s)$	$\mathrm{e}^{-at}\, u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}(s+a)$
$-t\, u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}'(s)$	$t^2\, u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}^{(n)}(s)$			
$u'(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s\,\underline{U}(s) - u(0)$	$u''(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s^2\underline{U}(s) - s\, u(0) - u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s^n\underline{U}(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \ldots - u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}\,\underline{U}(s)$	period. mit T	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T u(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$
$\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1-\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2}\, t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\,(\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - \mathrm{e}^{-t/\tau_2})$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\mathrm{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t>0 \end{cases}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t-\tau+\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sigma(t) =$ $E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$			

(Abbildung 1 : Tabelle aus der Zmf. für die Prüfung)

Repetion: Bauteile im Laplacebereich mit Anfangswerten

Komponente	Spannung	Strom
	$\underline{U}=R\underline{I}$	$\underline{I}=\underline{U}/R$
	$\underline{U}=sL\underline{I}-Li(+0)$	$\underline{I}=\frac{1}{sL}\underline{U}+\frac{i(+0)}{s}$
	$\underline{U}=\frac{1}{sC}\underline{I}+\frac{u(+0)}{s}$	$\underline{I}=sC\underline{U}-Cu(+0)$
	**Transformator-Gleichungen** $\underline{U}_1(s)=sL_1\underline{I}_1(s)-L_1i_1(+0)+sM\underline{I}_2(s)-Mi_2(+0)$ $\underline{U}_2(s)=sM\underline{I}_1(s)-Mi_1(+0)+sL_2\underline{I}_2(s)-L_2i_2(+0)$	

Um die Tabelle für die Rücktransformation aus dem Bildbereich zurück in den Zeitbereich benutzen zu können, muss man oft kompliziertere Brüche mit der Partialbruchzerlegung (PBZ) in einfachere Brüche zerlegen:

Bsp:

$$\frac{1}{s(s+3)} \rightarrow \mathrm{PBZ} \rightarrow \frac{1}{3\cdot s} - \frac{1}{3(s+3)}$$

Ansatz für eine einfache PBZ:

$$\frac{1}{(s-s_1)\cdot(s-s_2)\cdot\ \ldots} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \ \ldots$$

-> Mit dem Nenner der linken Seite Erweitern:

$$1 = A_1\cdot(s-s_2)\cdot\ \ldots\ + A_2\cdot(s-s_1)\cdot\ \ldots$$

-> Liefert n Gleichungen um die Koeffizienten $A_1 \ldots . A_n$ zu bestimmen.

Bei m-fachen Nullstellen: $\frac{(Polynom\ (Grad \le m-1))}{(s-s_1)^m} = \frac{A_1}{(s-s_1)} + \frac{A_2}{(s-s_1)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(s-s_1)^m}$

Partialbruchzerlegung Beispiel

Führe für folgenden Bruch eine Partialbruchzerlegung durch

$$\frac{s+10}{s^2+5s-14}$$

HP PRIME...

$\text{PARTFRAC}\left(\frac{s+10}{s^2+5s-14}\right)$

1) NULLSTELLEN BESTIMMEN : $s^2 + 5s - 14 \overset{!}{=} 0$

$$\Longleftrightarrow \quad s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \Longrightarrow \quad s_1 = -7, \quad s_2 = 2$$

2) BRUCH MIT NS AUFSCHREIBEN :

$$\frac{s+10}{s^2+5s-14} = \boxed{\frac{s+10}{(s+7)(s-2)} = \frac{A}{(s+7)} + \frac{B}{(s-2)}} = \underline{\underline{\frac{-\frac{1}{3}}{(s+7)} + \frac{\frac{4}{3}}{(s-2)}}}$$

3) GLEICHUNGEN AUFSTELLEN

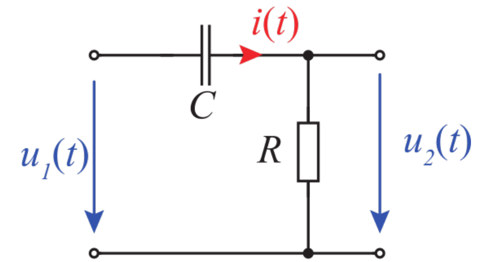
$$\Longleftrightarrow \quad s + 10 = A(s-2) + B(s+7)$$

$$\underline{s=2} : \quad 12 = 9 \cdot B \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{B} = \frac{12}{9} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

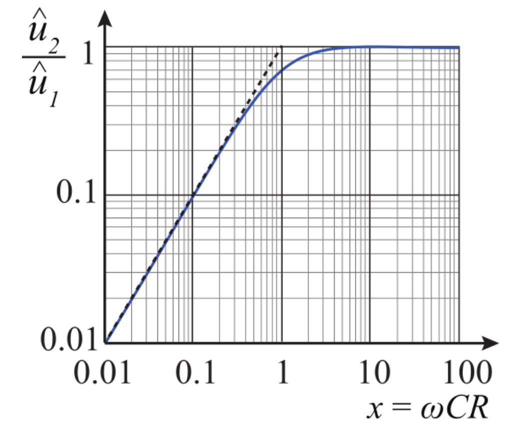
$$\underline{s=-7} : \quad 3 = -9A \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{A = \frac{-1}{3}}}$$

Da war doch noch was - Bodeplots

- **Wir benutzen sog. Bodeplots, um das Verhalten von Übertragungsfunktionen bei verschiedenen Frequenzen zu untersuchen**

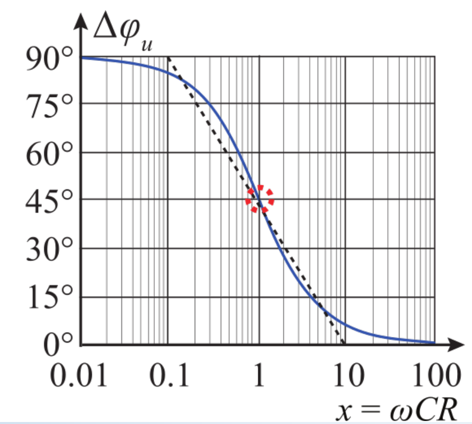


- **Zwei Plots: Amplitude + Phasenverschiebung**



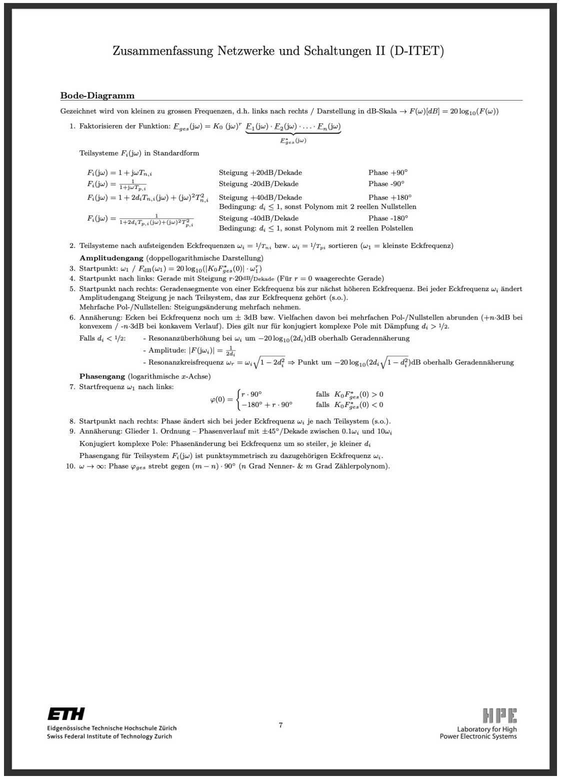
- **Uns interessiert das Verhalten über mehrere Grössenordnungen**

- **=> log-Skala (dB)**
- $(\frac{u_2}{u_1})_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(\frac{u_2}{u_1})$
- **Erinnert euch an folgende Eigenschaft der log-Fkt.:**
  - $log_{10}(A \cdot B \cdot C) = log_{10}$(A) + log_{10}(B) + log_{10}(C)



Bodeplots: How to?

- **Executive Summary:**
  - Übertragungsfunktion in Nullstellenform bringen (also nach Grundbausteinen aufsplitten)
  - Grenzfrequenzen berechnen
  - Beiträge der einzelnen Grundbausteine bestimmen
  - Startpunkt berechnen
  - Funktion aufzeichnen



Zusammenfassung Netzwerke und Schaltungen II (D-ITET)

Bode-Diagramm

Gezeichnet wird von kleinen zu grossen Frequenzen, d.h. links nach rechts / Darstellung in dB-Skala $\rightarrow F(\omega)[dB] = 20\log_{10}(F(\omega))$

1. Faktorisieren der Funktion: $\underline{F}_{ges}(\mathrm{j}\omega) = K_0\ (\mathrm{j}\omega)^r\ \underbrace{\underline{F}_1(\mathrm{j}\omega)\cdot\underline{F}_2(\mathrm{j}\omega)\cdot\ldots\cdot\underline{F}_n(\mathrm{j}\omega)}_{\underline{F}^*_{ges}(\mathrm{j}\omega)}$

   Teilsysteme $F_i(\mathrm{j}\omega)$ in Standardform

$F_i(\mathrm{j}\omega) = 1 + \mathrm{j}\omega T_{n,i}$	Steigung +20dB/Dekade	Phase +90°
$F_i(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T_{p,i}}$	Steigung -20dB/Dekade	Phase -90°
$F_i(\mathrm{j}\omega) = 1 + 2d_iT_{n,i}(\mathrm{j}\omega) + (\mathrm{j}\omega)^2T_{n,i}^2$	Steigung +40dB/Dekade Bedingung: $d_i \leq 1$, sonst Polynom mit 2 reellen Nullstellen	Phase +180°
$F_i(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+2d_iT_{p,i}(\mathrm{j}\omega)+(\mathrm{j}\omega)^2T_{p,i}^2}$	Steigung -40dB/Dekade Bedingung: $d_i \leq 1$, sonst Polynom mit 2 reellen Polstellen	Phase -180°

2. Teilsysteme nach aufsteigenden Eckfrequenzen $\omega_i = 1/T_{ni}$ bzw. $\omega_i = 1/T_{pi}$ sortieren (ω_1 = kleinste Eckfrequenz)

   Amplitudengang (doppellogarithmische Darstellung)
3. Startpunkt: ω_1 / $F_{\mathrm{dB}}(\omega_1) = 20\log_{10}(|K_0F^*_{ges}(0)|\cdot\omega_1^r)$
4. Startpunkt nach links: Gerade mit Steigung $r\cdot 20$dB/Dekade (Für $r=0$ waagerechte Gerade)
5. Startpunkt nach rechts: Geradensegmente von einer Eckfrequenz bis zur nächst höheren Eckfrequenz. Bei jeder Eckfrequenz ω_i ändert Amplitudengang Steigung je nach Teilsystem, das zur Eckfrequenz gehört (s.o.).
   Mehrfache Pol-/Nullstellen: Steigungsänderung mehrfach nehmen.
6. Annäherung: Ecken bei Eckfrequenz noch um ± 3dB bzw. Vielfachen davon bei mehrfachen Pol-/Nullstellen abrunden ($+n\cdot$3dB bei konvexem / $-n\cdot$3dB bei konkavem Verlauf). Dies gilt nur für konjugiert komplexe Pole mit Dämpfung $d_i > 1/2$.

   Falls $d_i < 1/2$:
   - Resonanzüberhöhung bei ω_i um $-20\log_{10}(2d_i)$dB oberhalb Geradennäherung
   - Amplitude: $|F(\mathrm{j}\omega_i)| = \frac{1}{2d_i}$
   - Resonanzkreisfrequenz $\omega_r = \omega_i\sqrt{1-2d_i^2} \Rightarrow$ Punkt um $-20\log_{10}(2d_i\sqrt{1-d_i^2})$dB oberhalb Geradennäherung

   Phasengang (logarithmische x-Achse)
7. Startfrequenz ω_1 nach links:

$$\varphi(0) = \begin{cases} r\cdot 90^\circ & \text{falls } K_0F^*_{ges}(0) > 0 \\ -180^\circ + r\cdot 90^\circ & \text{falls } K_0F^*_{ges}(0) < 0 \end{cases}$$

8. Startpunkt nach rechts: Phase ändert sich bei jeder Eckfrequenz ω_i je nach Teilsystem (s.o.).
9. Annäherung: Glieder 1. Ordnung – Phasenverlauf mit ±45°/Dekade zwischen $0.1\omega_i$ und $10\omega_i$

   Konjugiert komplexe Pole: Phasenänderung bei Eckfrequenz um so steiler, je kleiner d_i

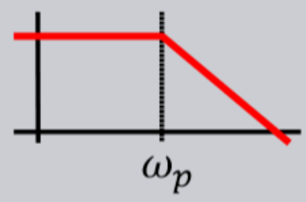
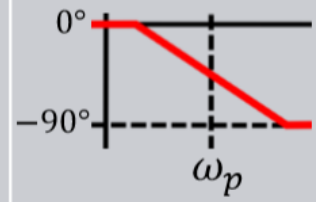
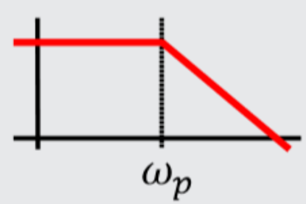
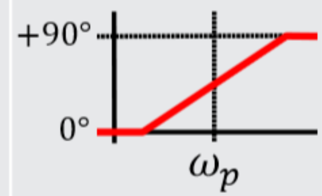
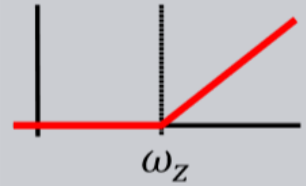
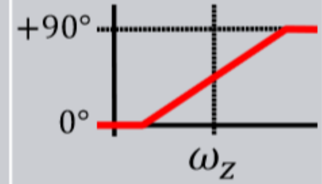
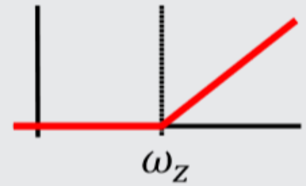
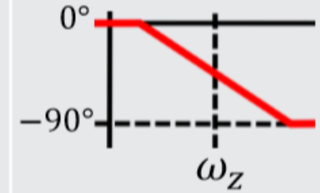
   Phasengang für Teilsystem $F_i(\mathrm{j}\omega)$ ist punktsymmetrisch zu dazugehörigen Eckfrequenz ω_i.
10. $\omega \rightarrow \infty$: Phase φ_{ges} strebt gegen $(m-n)\cdot 90^\circ$ (n Grad Nenner- & m Grad Zählerpolynom).

ETH Eidgenössische Technische Hochschule Zürich Swiss Federal Institute of Technology Zurich

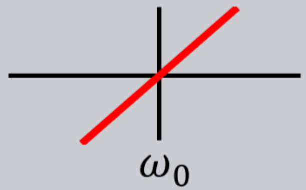
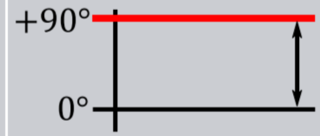
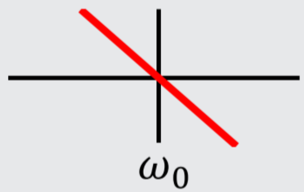
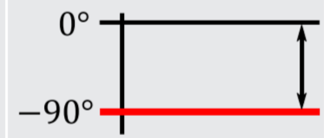
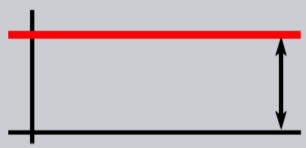
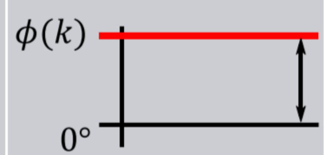
7

Laboratory for High Power Electronic Systems

Bodeplots: Grundbausteine I

	Formula	Amplitude		Phase	
Left Half-Plane Pole	$\dfrac{1}{1+\dfrac{j\omega}{\omega_p}}$	-20dB per decade from pole		$-90°$ over two decades	
Right Half-Plane Pole	$\dfrac{1}{1-\dfrac{j\omega}{\omega_p}}$	-20dB per decade from pole		$+90°$ over two decades	
Left Half-Plane Zero	$1+\dfrac{j\omega}{\omega_z}$	$+20$dB per decade from zero		$+90°$ over two decades	
Right Half-Plane Zero	$1-\dfrac{j\omega}{\omega_z}$	$+20$dB per decade from zero		$-90°$ over two decades	

Bodeplots: Grundbausteine II

	Formula	Amplitude		Phase	
Zero at $\omega = 0$	$\frac{j\omega}{\omega_0}$	$+20$dB per dec., 0dB at $\omega = \omega_0$		$+90°$	
Pole at $\omega = 0$	$\frac{\omega_0}{j\omega}$	-20dB per dec., 0dB at $\omega = \omega_0$		$-90°$	
Constant	k	$20\log_{10}\|k\|$		$\varphi(k)$	

Bodeplot: Beispiel als Refresher

- **Zeichne das Bodeplot von folgender Übertragungsfunktion**

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s \cdot (100 + s)}{50 \cdot (1 + s)^2} = G(s) = G(j\omega)$$

DA EIN NEGATIVER WERT GEBRAUCHT WERDE FÜR "DIE KATASTROPHE"

DA IM NENNER ⟹ POLE

IMMER POSITIV !!

			AMPLITUDE	PHASE
I:	ZERO @ ORIGIN	$\omega_1 = 0$	+20 dB / dec (SCHON VON ANFANG AN...)	+90° 'STARTWERT'
II	2x LHP - POLE (LEFT HALFPLANE POLE)	$\omega_2 = 1$	−40 dB / dec	−180° OVER 2 dec
III	LHP ZERO (LEFT HALF PLANE ZERO)	$\omega_3 = 100$	+20 dB / dec	+90° OVER 2 dec

AUFSTEIGEND SORTIEREN VEREINFACHT VIELES :)

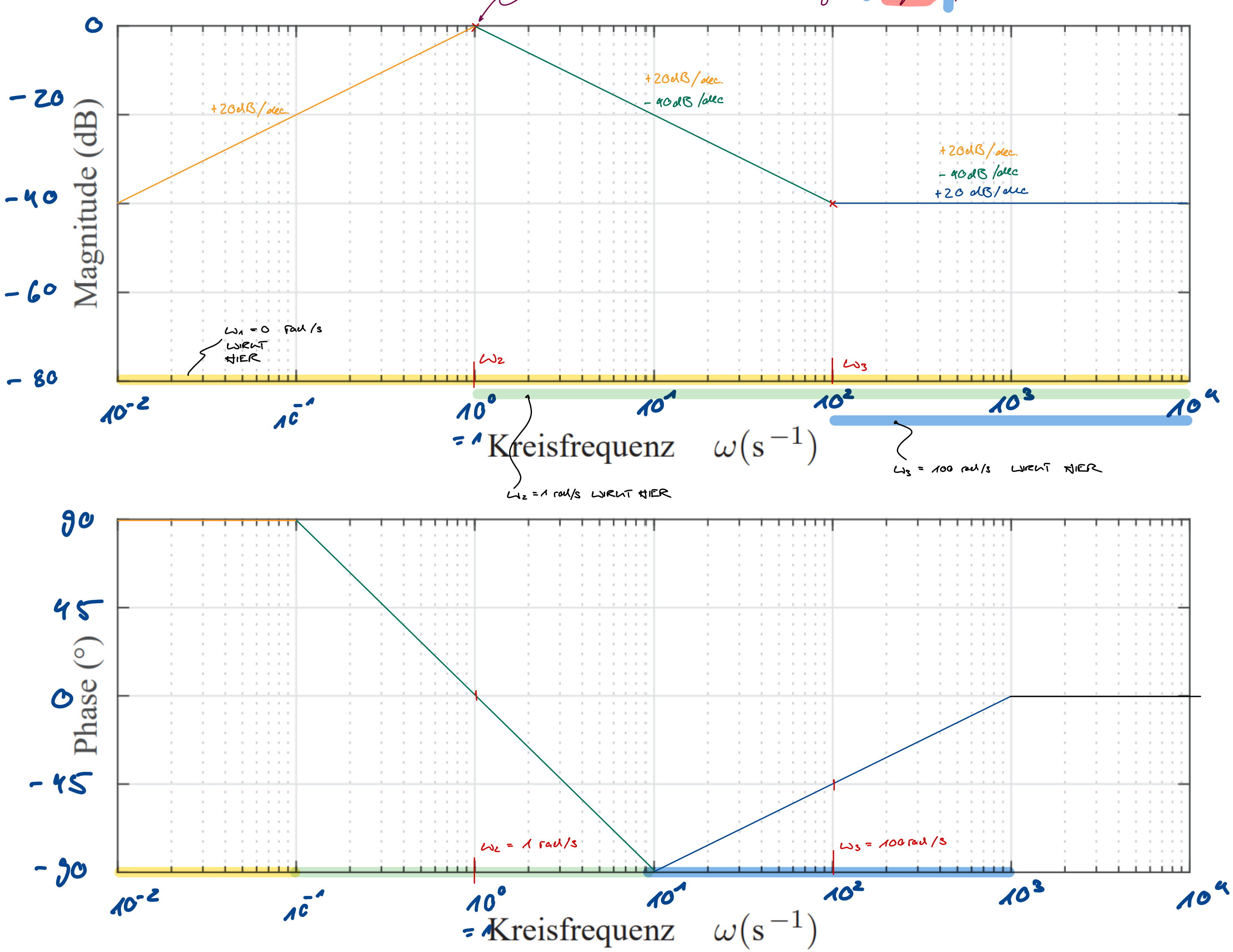
$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_2$

EFFEKTE ABLESEN ALS "ZUSAMMENFASSUNG"

Bodeplots: Beispiel 1

$$20\cdot\log_{10}\left[\left|\frac{(j\cdot 1)(100+j\cdot 1)}{50\cdot(1+j\cdot 1)^2}\right|\right]$$

STARTWERT @ $\omega_2 = 1$: $20\cdot\log_{10}\left(\left|G(j\omega_2)\right|\right) = 4.34\cdot 10^{-4}$ dB ≈ 0 dB



BEISPIELAUFGABE

Die Spannungsquelle in Abb. 1 liefert die im rechten Teilbild dargestellte periodische Sägezahnspannung mit der Amplitude $\widehat{u}$ und der Periodendauer T.

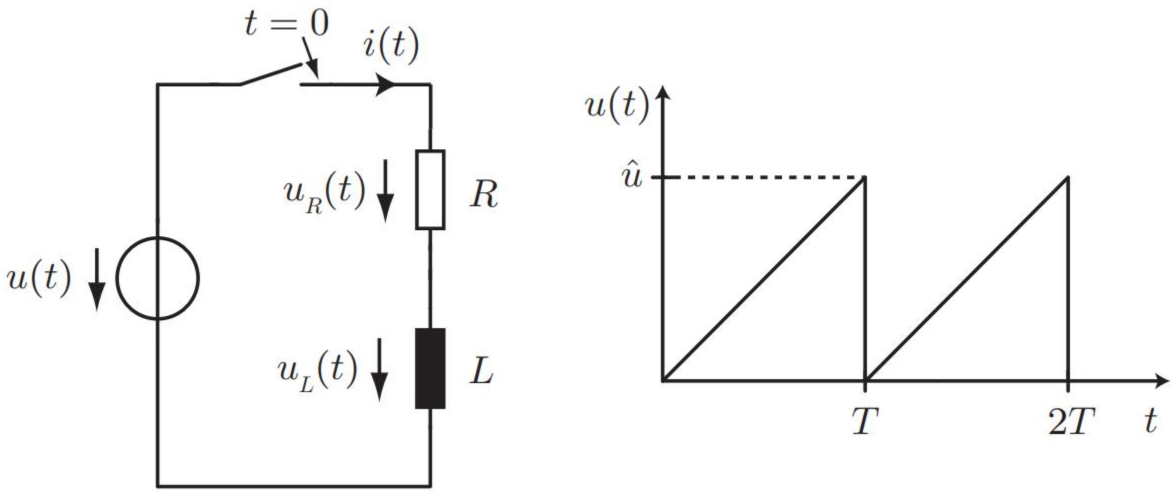


Abbildung 1: Sägezahnspannung an RL-Schaltung

Bestimmen sie den Verlauf des Stromes $i(t)$ für den Zeitbereich $0 \leq t \leq 2T$. Stellen Sie den Zeitverlauf für $R = 1\Omega, L = 10mH, \widehat{u} = 10\text{V}$ und $T = 100\mu s$ dar.