



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prüfungsvorbereitungskurs Netzwerke und Schaltungen 2

2. Halbtag

Janick Matter

1 Vorwort

In diesem Dokument findet Ihr in Kürze die 'wichtigsten' Konzepte und Themen, welche ich für den Prüfungsvorbereitungskurs (PVK) des Faches "Netzwerke und Schaltungen 2" (Prof. J. Biela) im FS24 zusammengefasst habe. Das Dokument basiert auf den Vorlesungsunterlagen, den Slides der Übungsstunden, und dem Vorlesungsscript, von welchen die meisten Abbildungen stammen. Ausserdem basieren der ungefähre Ablauf, sowie die Auswahl einiger Beispielaufgaben auf dem PVK von Maximilian Stralz, welcher den PVK vergangenes Jahr gehalten hatte.

Da ich dieses Semester das erste Mal PVK in NuS2 halte, bin ich für gespotete Typos oder Anregungen und Verbesserungsvorschläge besonders dankbar. Die neuste Version des Skriptes (siehe 2) findet Ihr immer auf meiner Webseite n.ethz.ch/jamatter/ - oder via QR code unten.

Ich wünsche euch alles Gute für eure Prüfungen ;)

jamatter@student.ethz.ch



2 Überarbeitungen

- 6.6.2025: Initial version
- 7.6.2025:
 - Abschnitt 3.1, Abbildung 2: Einheiten von S und Q vertauscht.
 - Abschnitt 4.2, Abbildung 10: Bildunterschrift korrigiert.
 - Diverse Abschnitte: Unterstrich-Notation für komplexe Werte korrigiert.
- 18.6.2025
 - Abschnitt 3: Typo korrigiert.
 - Abschnitt 3.1.2: Typo korrigiert.
 - Abschnitt 4: Typo korrigiert.
 - Abschnitt 5: Typo korrigiert.
 - Abschnitt 7.1.1: Typo korrigiert.

Contents

1	Vorwort	1
2	Überarbeitungen	2
3	Leistung/ und Leistungsanpassung	4
3.1	Wirk- Blind- und Scheinleistung	5
3.1.1	Leistungen an Widerständen	6
3.1.2	Leistungen an Induktivitäten	6
3.1.3	Leistungen an Kondensatoren	7
3.2	Leistungsanpassung	8
3.2.1	Fall: $Z_L \in \mathbb{C}$	8
3.2.2	Fall: $Z_L \in \mathbb{R}$	9
4	Dreiphasensysteme	10
4.1	Sternschaltung	10
4.2	Dreiecksschaltung	13
4.3	Leistung in Dreiphasensystemen	14
4.4	Stern-Dreieck-Umwandlung	15
4.4.1	Lastseite (Impedanzen)	15
4.4.2	Quellseite	15
5	Superposition 1	17
5.1	Thevenin und Northon	17
6	Maschenstromverfahren	18
6.1	Vorgehen	18
6.1.1	Transformatoren	19
6.1.2	Gesteuerte Quellen	20
6.1.3	Stromquellen	20
7	Knotenpotentialverfahren	21
7.1	Vorgehen	21
7.1.1	Transformatoren	22
7.1.2	Gesteuerte Quellen	23
7.1.3	Spannungsquellen	24

3 Leistung/ und Leistungsanpassung

Die Momentanleistung $p(t)$ ist für jeden Zeitpunkt t in einem linearen Zweipol (Figure 1) gegeben als:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (1)$$

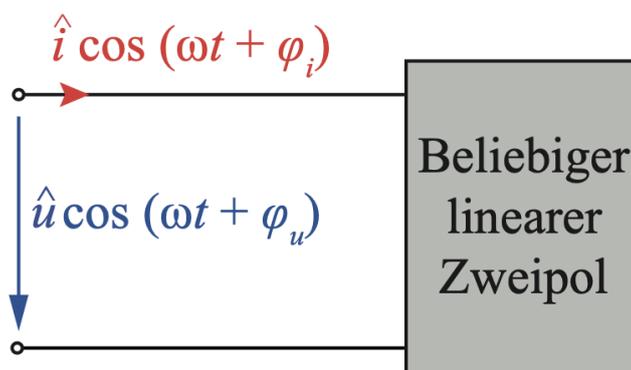


Figure 1: Allgemeiner linearer Zweipol mit Strom- und Spannungssignalen im Zeitbereich.

Für passive Netzwerke gilt ausserdem:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \geq 0 \quad (2)$$

Es wird ausserdem unterschieden, ob der Zweipol Leistung aufnimmt ($p(t) > 0$) oder abgibt ($p(t) < 0$).

Anhand der Momentanleistung $p(t)$ können auch Ausdrücke für Wirk- und Blindleistung hergeleitet werden (Vorlesungsskript S. 78).

3.1 Wirk- Blind- und Scheinleistung

Figur 2 visualisiert die 3 "Leistungsarten", welche in Wechselstromnetzwerken auftreten können.



Figure 2: Scheinleistung S in [VA] (Bier + Schaum), Blindleistung Q in [VAR] (Schaum) und Wirkleistung P in [W] (Bier).

Dabei gelten allgemein folgende Formeln zur Berechnung der Größen:

$$\underline{S} = UIe^{j\Delta\varphi} = P + jQ = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}^*}{2} = \frac{U^2}{\underline{Z}^*} = \underline{Z} \cdot I^2 \quad (3)$$

$$P = \text{Re}(\underline{S}) = S \cdot \cos(\Delta\varphi) = UI \cdot \cos(\Delta\varphi) \quad (4)$$

$$Q = \text{Im}(\underline{S}) = S \cdot \sin(\Delta\varphi) = UI \cdot \sin(\Delta\varphi) \quad (5)$$

Wobei gilt:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_u - \varphi_i \\ S &= |\underline{S}| = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ U &= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (6)$$

3.1.1 Leistungen an Widerständen

Die Momentanleistung aus Gleichung 1 in einem Widerstand ergibt sich wie folgt:

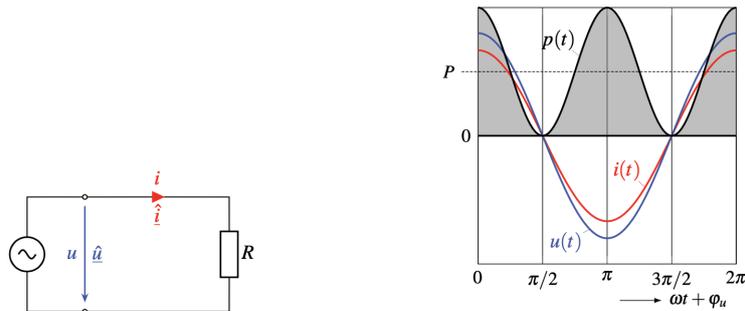


Figure 3: Strom- Spannungs- und Leistungssignal über einem Widerstand im Zeitbereich, wobei $\varphi_u = 0$ und $\varphi_i = 0$.

Der Mittelwert der Wirkleistung ist gegeben als:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) = UI \cdot \cos(\Delta\varphi) \quad , \text{ wobei: } \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (7)$$

3.1.2 Leistungen an Induktivitäten

Die Momentanleistung aus Gleichung 1 in einer Induktivität ergibt sich wie folgt:

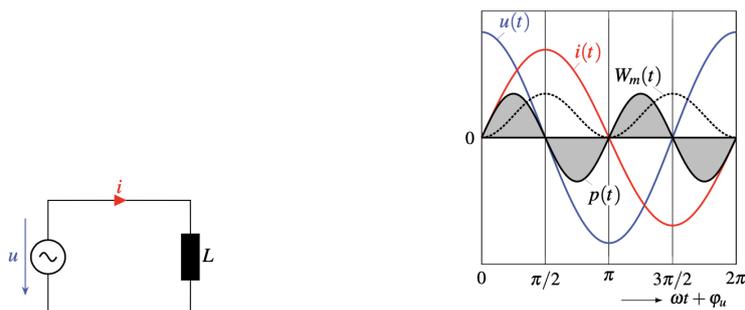


Figure 4: Strom- Spannungs- und Leistungssignal über einer Induktivität im Zeitbereich, wobei $\varphi_u = 0$ und $\varphi_i = -\pi/2$.

Der Mittelwert der Wirkleistung ist dabei, aufgrund der Phasenverschiebung, gleich 0. Die Energie $W_{ind}(t)$, welche in der Induktivität gespeichert wird,

kann wie folgt berechnet werden:

$$W_{ind}(t) = \frac{1}{2} \cdot Li(t)^2 \quad (8)$$

3.1.3 Leistungen an Kondensatoren

Die Momentanleistung aus Gleichung 1 in einem Kondensator ergibt sich wie folgt:

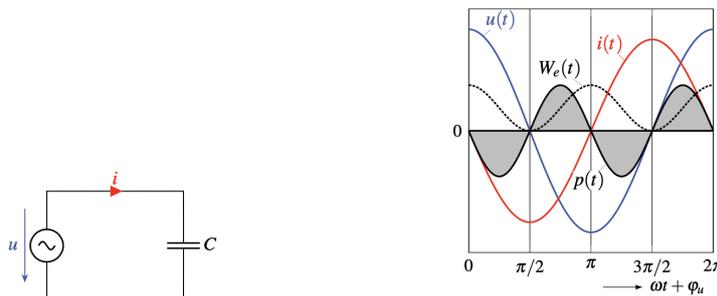


Figure 5: Strom- Spannungs- und Leistungssignal über einem Kondensator im Zeitbereich, wobei $\varphi_u = 0$ und $\varphi_i = +\pi/2$.

Der Mittelwert der Wirkleistung ist dabei, aufgrund der Phasenverschiebung, gleich 0. Die Energie $W_{cond}(t)$, welche im Kondensator gespeichert wird, kann wie folgt berechnet werden:

$$W_{cond}(t) = \frac{1}{2} \cdot Cu(t)^2 \quad (9)$$

3.2 Leistungsanpassung

Ziel der Leistungsanpassung ist es die Wirkleistung P_L an einer Last $Z_L = R_L + jX_L$ zu maximieren. Diese hängt von der Innenimpedanz $Z_i = R_i + jX_i$ des Netzwerkes ab. Wir unterscheiden grundsätzlich 2 Fälle:

- $Z_L \in \mathbb{C}$
- $Z_L \in \mathbb{R}$

3.2.1 Fall: $Z_L \in \mathbb{C}$

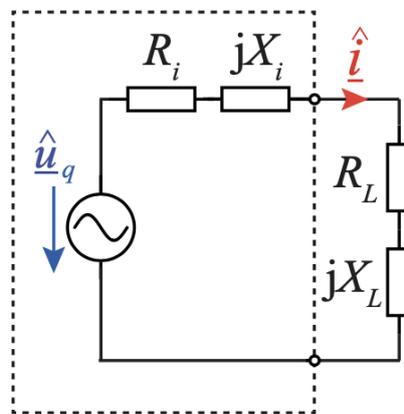


Figure 6: Gegeben: Quelle u_q mit komplexer Innenimpedanz Z_i . Gesucht: Komplexe Last Z_L um die Wirkleistung P_L zu maximieren.

Falls unsere Last $Z_L = R_L + jX_L$ komplex ist (Siehe 6), wir die Wirkleistung über der Last maximal (angenommen Z_i ist bekannt), wenn wir unsere Last wie folgt wählen:

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_i^* \quad (10)$$

und somit gilt:

$$\begin{aligned} R_L &= R_i \\ X_L &= -X_i \end{aligned} \quad (11)$$

Die maximale Leistung P_L über der last Z_L ergibt sich dann als:

$$P_{max} = \frac{\hat{u}_q^2}{2} \cdot \frac{1}{4R_L} \quad (12)$$

3.2.2 Fall: $Z_L \in \mathbb{R}$

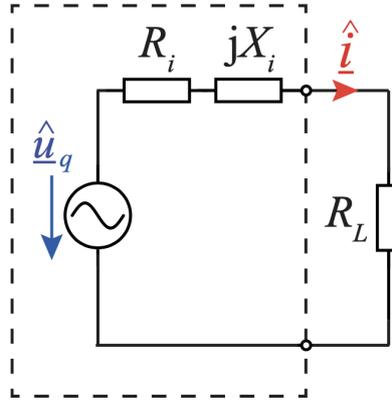


Figure 7: Gegeben: Quelle u_q mit komplexer Innenimpedanz Z_i . Gesucht: Reelle Last R_L um die Wirkleistung P_L zu maximieren.

Falls unsere Last $Z_L = R_L$ reell ist (Siehe 7), wir die Wirkleistung über der Last maximal (angenommen Z_i ist bekannt), wenn wir unsere Last wie folgt wählen:

$$R_L = |Z_i| = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} \quad (13)$$

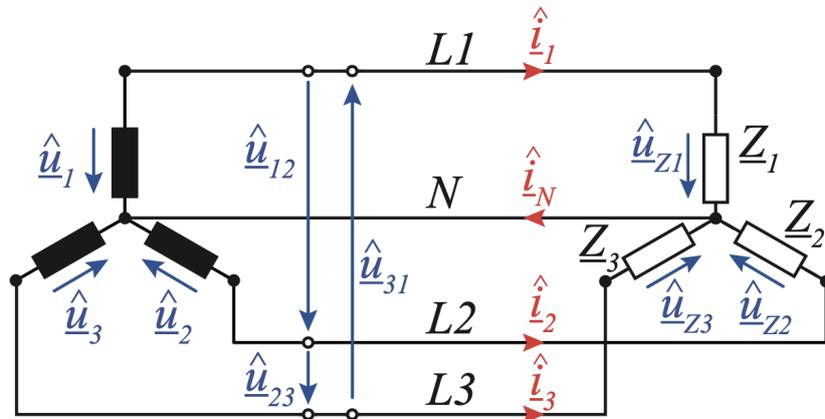
Die maximale Leistung P_L über der last Z_L ergibt sich dann als:

$$P_{max} = \frac{\hat{u}_q^2}{4} \cdot \frac{1}{R_i + \sqrt{R_i^2 + X_i^2}} \quad (14)$$

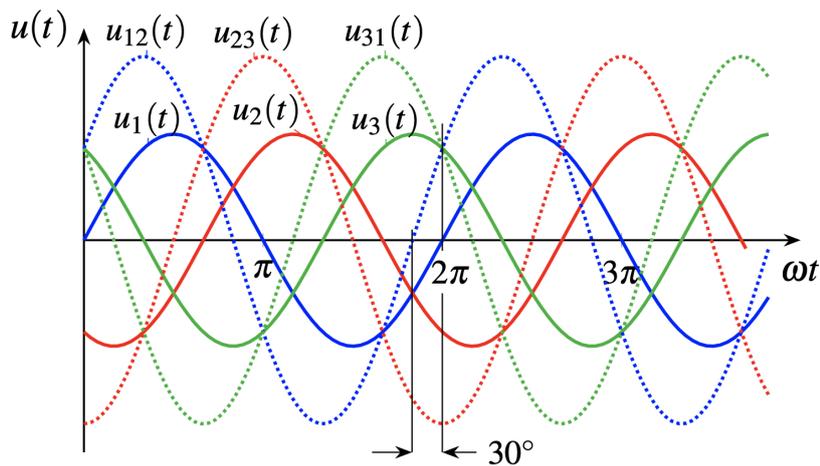
4 Dreiphasensysteme

4.1 Sternschaltung

Dreiphasige Drehstromsysteme bestehen aus drei Spannungen oder Strömen, deren Amplituden groß sind und sich um jeweils 120 Grad voneinander unterscheiden (aufgrund der Geometrie der Generatoren). Das sorgt für eine gleichmäßige Leistungsabgabe und verhindert Leistungsschwankungen.



(a) Drehstromsystem in Stern-Stern-Konfiguration. Die Strangströme entsprechen den Strömen in den Lasten.



(b) Resultierende Spannungsverläufe für Strangspannungen $u_i(t)$ und Aussenleiterspannungen $u_{ij}(t)$.

Figure 8: .

Dabei werden oft entweder Strangspannungen (Phase2Ground, oder p2g), oder Aussenleiterspannungen (Phase2Phase, oder p2p) angegeben, deren Amplituden wie folgt zusammenhängen:

$$\hat{u}_{ij} = \sqrt{3} \cdot \hat{u}_i \quad (15)$$

Ausserdem entsteht durch die Maschengleichungen eine Phasenverschiebung von $\pm 30^\circ$ zwischen den p2p und p2g-Spannungen.

Oft wird bei Drehstromsystemen die Phase einer der Spannungen auf 0 gesetzt, welches zu folgender (häufiger) Konfiguration führt:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{u}}_1 &= \hat{u}e^{j0^\circ} = \sqrt{2} \cdot Ue^{j0^\circ} \\ \underline{\hat{u}}_2 &= \hat{u}e^{j120^\circ} \\ \underline{\hat{u}}_3 &= \hat{u}e^{-j120^\circ} \end{aligned} \quad (16)$$

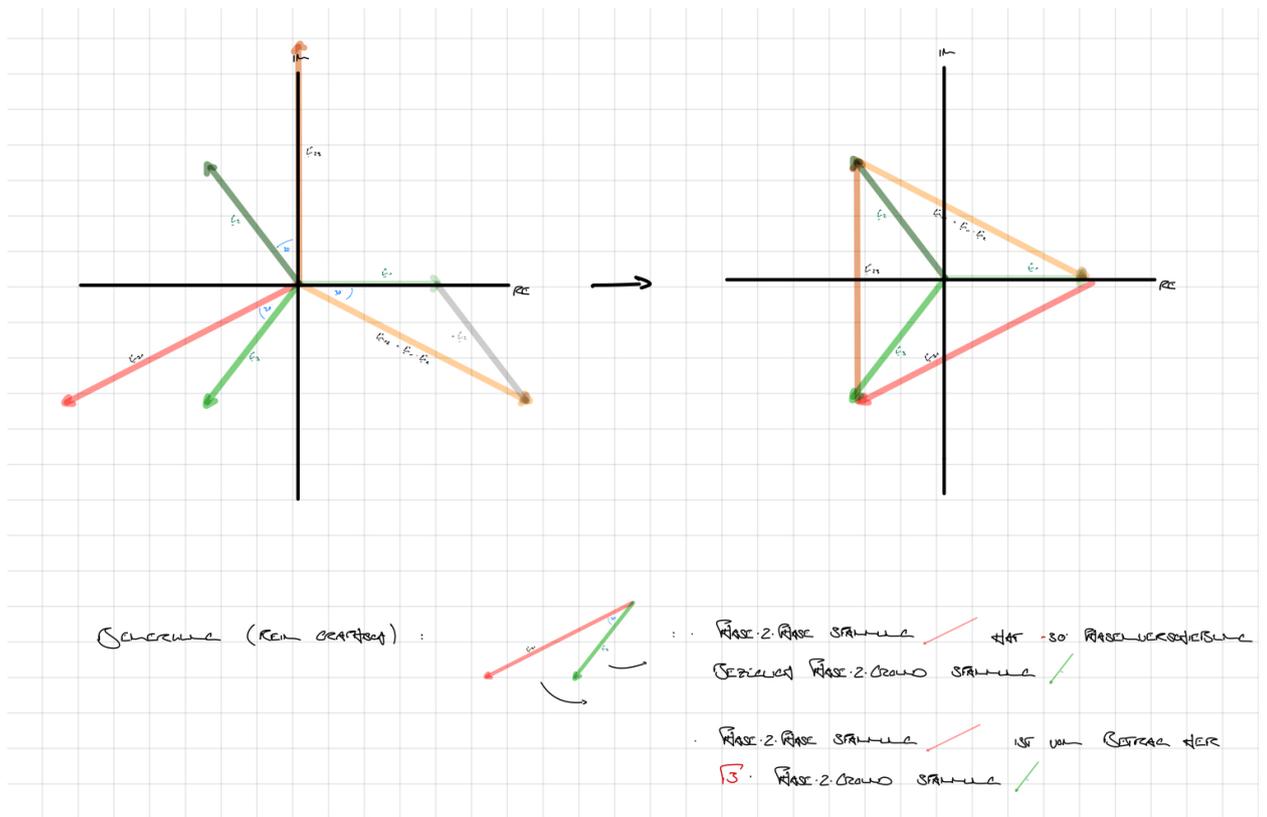


Figure 9: Zeigerdiagramm mit p2g- und p2p-Spannungen für die Konfiguration von 16. Das vollständige Dokument ist auf der Webseite (Dreiphasen explained).

In dieser Konfiguration (Abbildung 9, bzw. Gleichungen 16) des Stern-Stern-Drehstromsystems eilt die Phase der p2p-Spannungen um 30° **nach**. Falls die Phasen der Spannungen $u_2(t)$ und $u_3(t)$ vertauscht würden, würden die p2p-Spannungen um 30° bezüglich der p2g-Spannungen **voreilen**. Falls die Last Symmetrisch ist, also $Z_1 = Z_2 = Z_3$, kann der Neutraleiter weggelassen werden, da kein Strom durchfließt (die Phasenströme kürzen sich im Sternpunkt des Lasten-Sterns aus).

4.2 Dreiecksschaltung

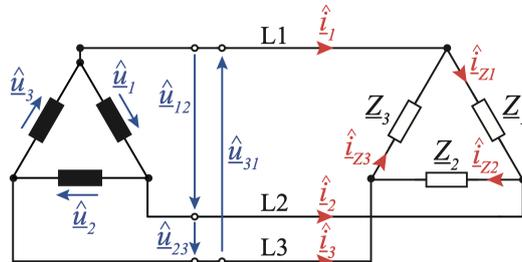


Figure 10: Dreiecks-Konfiguration eines Drehstromsystems. Quellspannungen der Dreiecks-Konfiguration entsprechen den Phase2Phase Spannungen (der Sternkonfiguration).

In dieser Konfiguration entsprechen die "Quellspannungen" gerade den p2p-Spannungen. Allerdings unterscheiden sich die Amplituden der Strangströme von den Strömen in den Lasten durch den Faktor $\sqrt{3}$ und einer $\pm 30^\circ$ Phasenverschiebung, je nach Phase, die auf die reelle Achse "gelegt" wird (ähnlich zur Sternkonfiguration):

$$\hat{i}_i = \sqrt{3} \cdot \hat{i}_{Z_i} \quad (17)$$

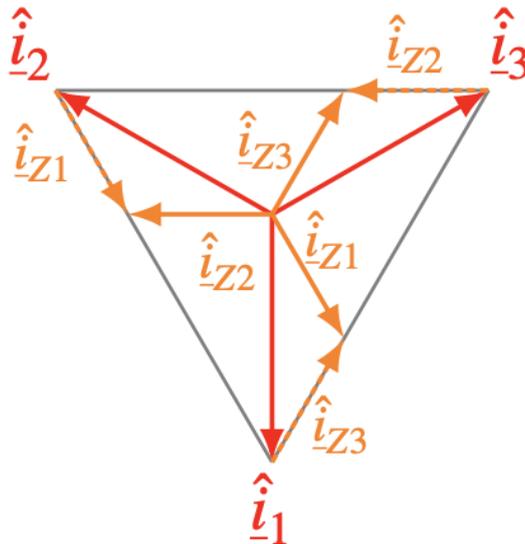


Figure 11: Zeigerdiagramm der Ströme einer Dreiecks-Konfiguration 11.

4.3 Leistung in Dreiphasensystemen

Unabhängig der Konfiguration (Stern oder Dreieck), gilt:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = U_{Z_1} I_{Z_1} \cos(\Delta\varphi_1) + U_{Z_2} I_{Z_2} \cos(\Delta\varphi_2) + U_{Z_3} I_{Z_3} \cos(\Delta\varphi_3) \quad (18)$$

Falls die Last gerade symmetrisch ist ($Z_1 = Z_2 = Z_3$) gilt zudem:

$$P = 3 \cdot U_Z I_Z \cos(\Delta\varphi) \quad (19)$$

wobei U_Z die Effektivspannung (RMS Spannung) über der Lastimpedanz Z beschreibt.

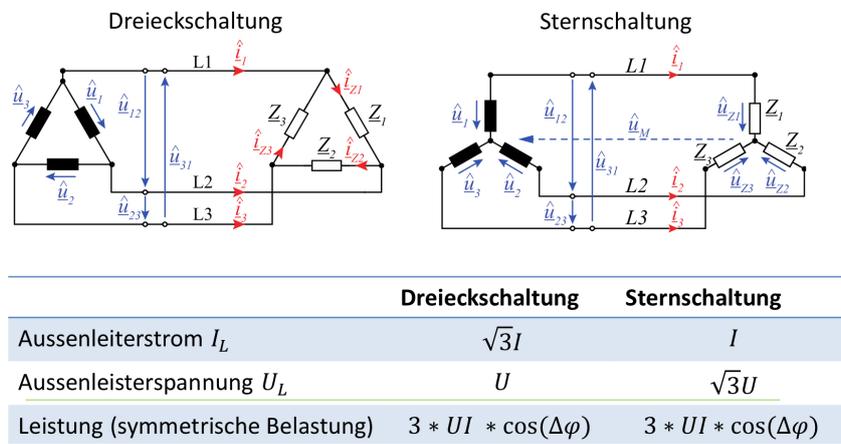


Figure 12: Vergleich von Stern und Dreieck-Konfiguration mit Vergleich der Aussenleiterspannung (p2p), sowie der Leistung bei symmetrischer Belastung.

4.4 Stern-Dreieck-Umwandlung

4.4.1 Lastseite (Impedanzen)

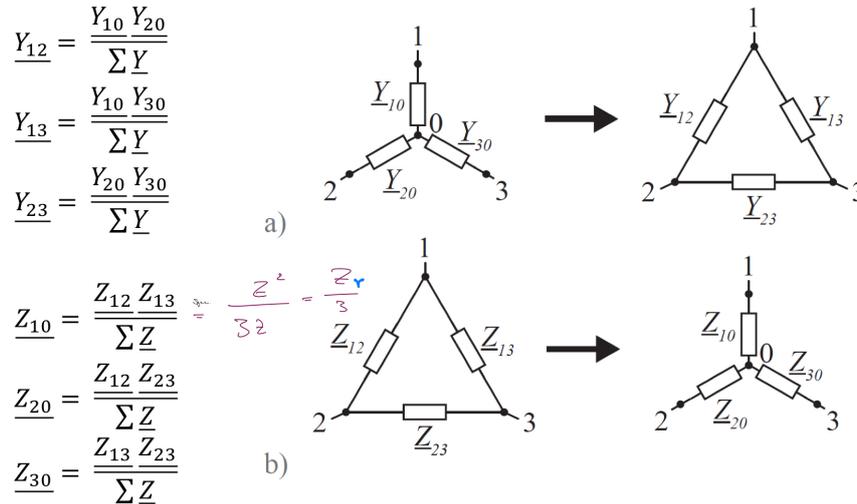
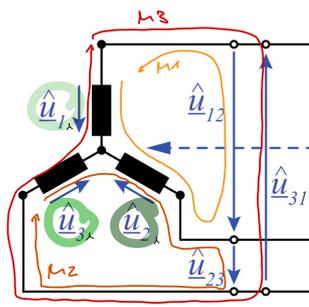


Figure 13: Umwandlung von Stern- zu Dreieckskonfiguration (und umgekehrt) von Impedanzen in Drehstromsystemen. Falls die Belastung symmetrisch ist gilt: $\underline{Z}_{Dreieck} = \frac{1}{3} \cdot \underline{Z}_{Stern}$.

4.4.2 Quellseite

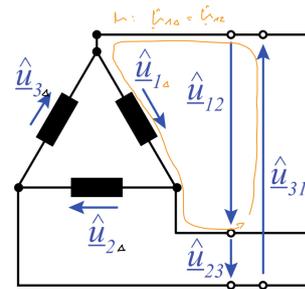
Auch die Quellseite kann von Dreieck zu Sternschaltung (und umgekehrt) umgewandelt werden. Dabei entsprechen die Quellspannungen der Dreieckskonfiguration gerade der p2p Spannungen der Sternkonfiguration.



(a) Sternkonfiguration der Quellseite.

$$\begin{aligned}
 M1: \hat{u}_{1a} - \hat{u}_{2a} - \hat{u}_{12} &= 0 \\
 \Rightarrow \hat{u}_{12} &= \hat{u}_{1a} - \hat{u}_{2a} \\
 \\
 M2: \hat{u}_{2a} - \hat{u}_{3a} - \hat{u}_{23} &= 0 \\
 \Rightarrow \hat{u}_{23} &= \hat{u}_{2a} - \hat{u}_{3a} \\
 \\
 M3: \hat{u}_{3a} - \hat{u}_{1a} - \hat{u}_{31} &= 0 \\
 \Rightarrow \hat{u}_{31} &= \hat{u}_{3a} - \hat{u}_{1a}
 \end{aligned}$$

(b) Maschengleichungen: p2p Spannungen.



(c) Dreieckskonfiguration der Quellseite.

Figure 14: Umwandlung der Quellseite von Sternkonfiguration zu Dreieckskonfiguration.

5 Superposition 1

5.1 Thevenin und Northon

Das Klemmenverhalten von einem beliebigen Zweipol kann vollständig durch einen Ersatzzweipol beschrieben werden. Die meist verwendeten Ersatzzweipole sind die Ersatzspannungsquelle (Thevenin) oder die Ersatzstromquelle (Northon).

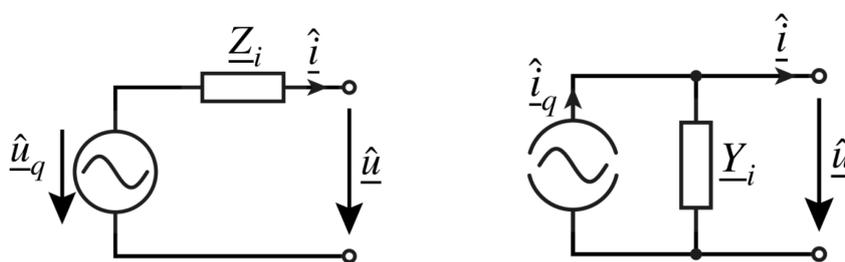


Figure 15: Thevenin- (links) und Northon-Schaltung (rechts.)

Diese beiden Ersatzzweipole können ineinander umgerechnet werden:

1. Kurzschlussstrom i_{KS} (bei Thevenin) oder Leerlaufspannung u_{LL} (bei Northon) berechnen
 - (a) Last zwischen den Klemmen entfernen und durch Kurzschluss oder Leerlauf ersetzen
2. **alle** Quellen auf null setzen und Gesamtimpedanz (oder Admittanz) berechnen (von Klemmen aus)
3. Allgemein gilt der Zusammenhang:

$$\underline{u_{LL}} = \underline{Z_i} \cdot \underline{i_{KS}} \quad (20)$$

Falls die Umwandlung von Admittanz/Impedanz noch weitere Fragen aufwirft, habe ich dazu eine kurze separate Erläuterung geschrieben (siehe webseite).

6 Maschenstromverfahren

Prinzip: Einführen von linear unabhängigen, virtuellen Maschenströmen (erfüllen Knotengleichungen automatisch), um die Anzahl Gleichungen von Z (konventionelles Verfahren) auf $Z-(K-1)$ zu reduzieren. ($Z = \#Zweige$, $K = \#Knoten$). Das Einführen der Maschenströme kann entweder mittels Methode der Elementarmaschen, oder des vollständigen Baumes ermittelt werden.

6.1 Vorgehen

Achtung: auf die **Stolpersteine** wird anschliessend genauer eingegangen:

- **Transformatoren** → Ersetzen durch Ersatzschaltbild
- **Gesteuerte Quellen** → als unabhängige Quellen betrachten → Steuer-gleichungen abhängig der Maschenströme ausdrücken
- **Stromquellen** → "Stromquellenmasche"
- Maschenströme definieren (lin. unabhängig)
- → Stromquellen wieder einfügen und in Maschenstrom aufnehmen (siehe 6.1.3)
- Maschengleichungen aufstellen und GLS lösen (1 GL pro Maschenstrom)
 - Substitutions- oder Additionsverfahren (impossible)
 - Matrixform → Gaußen (kann mühsam werden..)
 - TR! (way to go)
- Gesuchte Teilgrößen via UZI-Beziehung berechnen

Es ist dabei wichtig zu erwähnen, dass die Impedanzmatrix (in der Regel) asymmetrisch wird, wenn im Netzwerk gesteuerte Quellen auftreten.

Das Maschenstromverfahren (sowie das Knotenpotentialverfahren) gilt nur für lineare Netzwerke.

6.1.1 Transformatoren

Sollte in der Analyse eines Netzwerkes mit dem Maschenstromverfahren ein Transformator vorkommen, muss dieser als erstes durch sein Ersatzschaltbild ersetzt werden, wobei anschliessend jede Seite des Transformators wie ein separater Netzwerkzweig behandelt wird:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= j\omega L_1 \hat{i}_{M1} + \hat{u}_{ind,1} & \hat{u}_{ind,1} &= j\omega M \hat{i}_{M2} \\ \hat{u}_2 &= j\omega L_2 \hat{i}_{M2} + \hat{u}_{ind,2} & \hat{u}_{ind,2} &= j\omega M \hat{i}_{M1} \end{aligned}$$

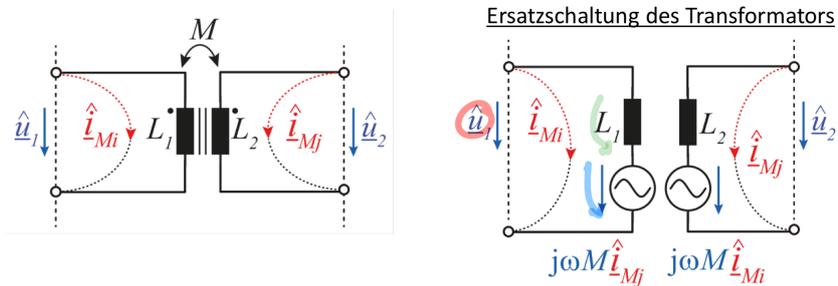


Figure 16: Ersatzschaltbild eines Transformators mit Kopplungsinduktivität M .

6.1.2 Gesteuerte Quellen

Sollte in der Analyse eines Netzwerkes mit dem Maschenstromverfahren eine gesteuerte Quelle vorkommen, kann diese Quelle zuerst als unabhängige Quelle betrachtet werden, und anschliessend deren Steuergleichung anhand der Maschenströme ausgedrückt werden (passiert meist ganz natürlich, da man sonst zu viele unbekannte im GLS hätte).

6.1.3 Stromquellen

Die bevorzugte Variante zur Behandlung von Stromquellen mit dem Maschenstromverfahren ist die "Stromquellenmasche" (im Kontrast zu der "Stromquellenwandlung", auf welche hier nicht weiter eingegangen wird), da diese Variante für reale und ideale Stromquellen Anwendung findet.

- Stromquelle **vor** dem Einführen der Maschenströme aus dem Netzwerk entfernen (Leerlauf)
- linear unabhängigen Maschenströme im Netzwerk definieren
- Stromquelle wieder hinzugefügen und in Maschengleichung aufnehmen. (siehe Beispielaufgabe W07)

7 Knotenpotentialverfahren

Prinzip: Einführen von Bezugsknoten mit Referenzpotential 0, sowie Knotengleichungen relativ zum Bezugsknoten (welche die Maschengleichungen automatisch erfüllen), um die Anzahl Gleichungen von $(K-1)+Z - (K-1)$ auf $K-1$ Gleichungen zu reduzieren ($Z = \#$ Zweige, $K = \#$ Knoten). Die Wahl des Bezugsknotens ist grundsätzlich frei, idealerweise werden aber zentrale Knoten (viele Zweige) gewählt.

7.1 Vorgehen

Bemerkung: auf die **Stolpersteine** wird anschliessend genauer eingegangen:

- **Transformatoren** → Ersetzen durch Ersatzschaltbild
- **Gesteuerte Quellen** → als unabhängige Quellen betrachten → Steuergleichungen abhängig der Knotenspannungen ausdrücken
- **Spannungsquellen** → "Superknoten"
- Bezugsknoten wählen (idealerweise zentral)
- Knotenpotentiale/Knotenspannungen bezüglich Bezugsknoten definieren
- Aufstellen und Lösen der Knotengleichungen
 - Substitutions- oder Additionsverfahren (impossible)
 - Matrixform → Gaußen (kann mühsam werden..)
 - TR! (way to go)
- Gesuchte Teilgrößen via UZI-Beziehung berechnen

Es ist dabei wichtig zu erwähnen, dass die Admittanzmatrix (in der Regel) asymmetrisch wird, wenn im Netzwerk gesteuerte Quellen auftreten. Das Knotenpotentialverfahren (sowie das Maschenstromverfahren) gilt nur für lineare Netzwerke.

7.1.1 Transformatoren

Transformatoren müssen im Knotenpotentialverfahren speziell behandelt werden, und zuerst in ihr Ersatzschaltbild umgezeichnet werden (siehe Figure 17). Dabei wird die Potentialtrennung aufgehoben, und durch einen virtuellen Kurzschluss dargestellt.

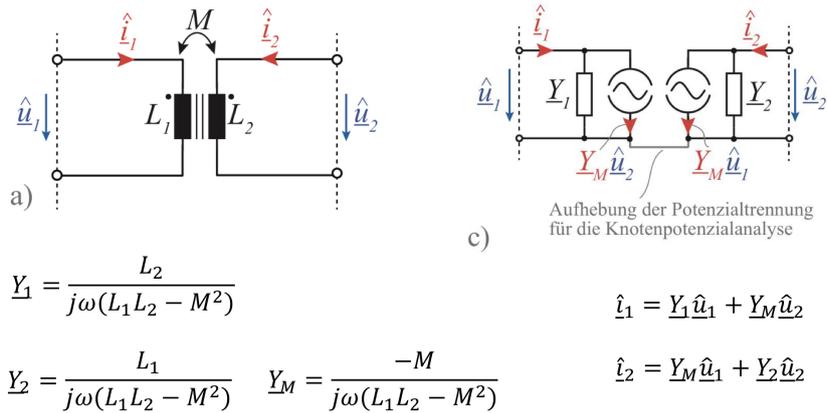


Figure 17: Umwandlung eines Transformators in sein Ersatzschaltbild (spannungsgesteuerte Stromquellen), und Aufhebung der Potentialtrennung (virtueller Kurzschluss).

7.1.2 Gesteuerte Quellen

Gesteuerte Quellen können beim Aufstellen des Gleichungssystems als unabhängige Quellen betrachtet werden, wobei deren Steuergleichungen anschließend in Abhängigkeit von den Knotenspannungen (und Admittanzen) ausgedrückt werden müssen

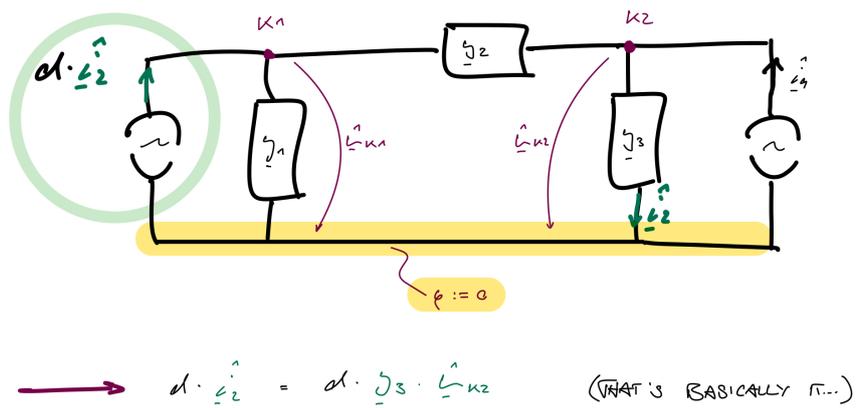


Figure 18: Umwandlung der Steuergleichung einer gesteuerten Quelle in Abhängigkeit von Knotenpotentialen. (Bezugsknoten in gelb)

7.1.3 Spannungsquellen

Spannungsquellen müssen beim Knotenpotentialverfahren ebenfalls speziell behandelt werden. Dabei wird ein **"Superknoten"** (der richtigere Begriff wäre Spannungsquellenknoten) über die Spannungsquelle eingeführt. Anschließend wird nur eine Knotengleichung für diesen "Superknoten" eingeführt, wobei die Ströme fix über die Quellspannung verbunden sind (siehe Beispiel unten):

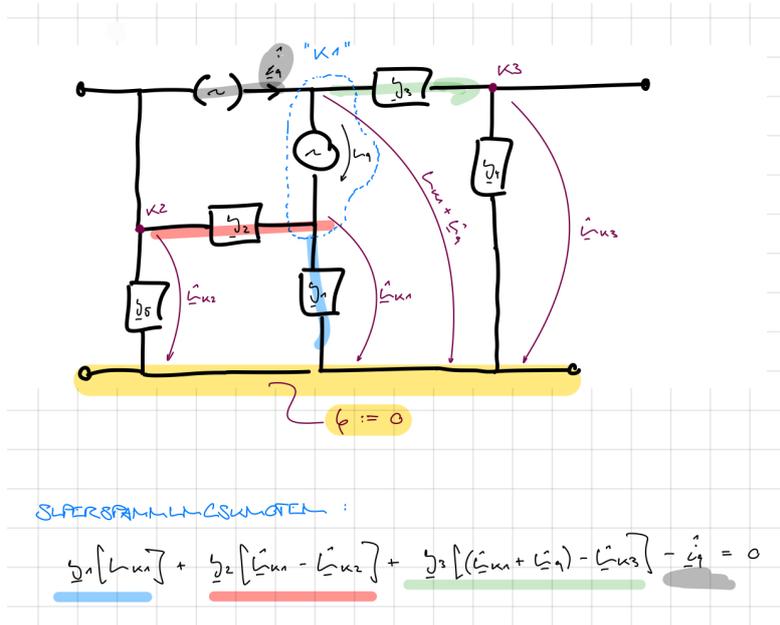


Figure 19: "Superknoten" über die Spannungsquelle, und die (1) daraus resultierende Gleichung für den Knoten. Die einzelnen Ströme sind dabei via Quellspannung miteinander verbunden.