



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Prüfungsvorbereitungskurs Netzwerke und Schaltungen 2

## 3. Halbtag

Janick Matter

# 1 Vorwort

In diesem Dokument findet Ihr in Kürze die 'wichtigsten' Konzepte und Themen, welche ich für den Prüfungsvorbereitungskurs (PVK) des Faches "Netzwerke und Schaltungen 2" (Prof. J. Biela) im FS24 zusammengefasst habe. Das Dokument basiert auf den Vorlesungsunterlagen, den Slides der Übungsstunden, und dem Vorlesungsscript, von welchen die meisten Abbildungen stammen. Ausserdem basieren der ungefähre Ablauf, sowie die Auswahl einiger Beispielaufgaben auf dem PVK von Maximilian Stralz, welcher den PVK vergangenes Jahr gehalten hatte.

Da ich dieses Semester das erste Mal PVK in NuS2 halte, bin ich für gespotete Typos oder Anregungen und Verbesserungsvorschläge besonders dankbar. Die neuste Version des Skriptes (siehe 2) findet Ihr immer auf meiner Webseite [n.ethz.ch/jamatter/](http://n.ethz.ch/jamatter/) - oder via QR code unten.

Ich wünsche euch alles Gute für eure Prüfungen ;)

[jamatter@student.ethz.ch](mailto:jamatter@student.ethz.ch)



## 2 Überarbeitungen

- 6.6.2025: Initial version
- 18.6.2025:
  - Abschnitt 3.0.1: Typo korrigiert.
  - Abschnitt 3.2.1: Typo korrigiert.
  - Abschnitt 3.0.1: Typo korrigiert.
  - Abschnitt 4.2: Typo korrigiert.
  - Abschnitt 4.2.4: Typo korrigiert.
  - Abschnitt 5.1: Typo korrigiert.

# Contents

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Überarbeitungen</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Harmonische Analyse</b>	<b>4</b>
3.0.1	Motivation . . . . .	4
3.1	Vorgehen . . . . .	5
3.2	Fourierreihe . . . . .	6
3.2.1	Symmetrieeigenschaften . . . . .	7
3.2.2	Effektivwert und Leistung . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Schaltvorgänge - DGL</b>	<b>10</b>
4.0.1	Motivation . . . . .	10
4.1	Vorgehen . . . . .	10
4.2	DGL lösen . . . . .	12
4.2.1	Homogene Lösung . . . . .	12
4.2.2	Partikuläre Lösung . . . . .	12
4.2.3	Beispiel: RC-Netzwerke . . . . .	14
4.2.4	Beispiel: RL-Netzwerke . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Netzwerkanalyse mit Laplacetransformation</b>	<b>16</b>
5.1	Allgemeines und Eigenschaften . . . . .	17
5.1.1	Einheitssprungfunktion und Zeitverschiebung . . . . .	18
5.2	Laplace-Ersatzschaltbilder . . . . .	20
5.3	Vorgehen . . . . .	21
5.3.1	Partialbruchzerlegung . . . . .	21

## 3 Harmonische Analyse

### 3.0.1 Motivation

Konkret geht es um die Netzwerkberechnung von Netzwerken, welche entweder mehrere Quellen mit unterschiedlichen Frequenzen besitzen (funktioniert auch mit Gleich- und Wechselgrößen), oder welche von periodischen (aber nicht-sinusförmigen) Signalen angeregt werden, welche sich als Fourierreihen schreiben lassen. Ein Beispiel solch eines Netzwerkes zeigt Abbildung 1.

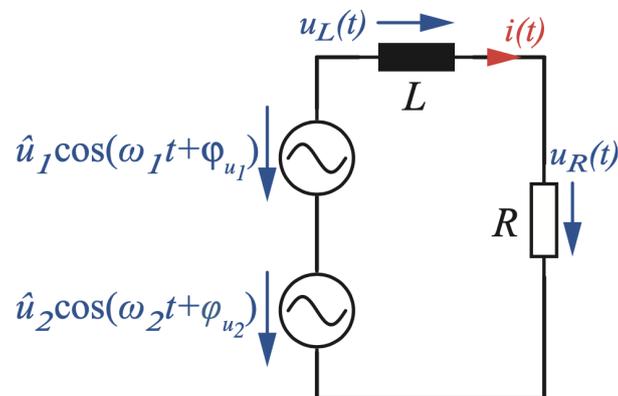


Figure 1: Netzwerk mit zwei unterschiedlichfrequenten Quellen:  $\omega_1$  und  $\omega_2$ .

### 3.1 Vorgehen

Grundsätzlich funktioniert das bisherige Superpositionsprinzip weiterhin, wobei die **Überlagerung ausschliesslich im Zeitbereich** erfolgen darf, da die Zeiger mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten rotieren.

- Falls allgemein T-periodische Quelle gegeben: Fourierreihe "berechnen"<sup>1</sup>
  - Zusammenfassung beachten
  - Symmetrieeigenschaften beachten
- Alle Quellen ausser einer aus Netzwerk entfernen
  - Stromquellen → Leerlauf
  - Spannungsquellen → Kurzschluss
- Wechselgrösse der Quelle in komplexe Zeiger umwandeln
  - $u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{\hat{u}}' = \hat{u} e^{j\varphi + j\omega t}$
- Gesuchte Teilspannung/Strom als Zeiger berechnen
  - Spannungs- oder Stromteiler
  - UZI-Beziehungen
  - ...
- Rücktransformation in den Zeitbereich
- Wiederholen für alle Quellen (oder Frequenzen)
- **Überlagerung** der Teilspannungen/Ströme **im Zeitbereich**

Falls im Netzwerk Gleichanteile für Ströme oder Spannungen auftreten, muss das Netzwerk in der Entsprechenden Betrachtung zuerst umgezeichnet werden (Induktivitäten → Kurzschluss, Kapazitäten → Leerlauf), da  $\omega = 0$ .

---

<sup>1</sup>Damit wird die Quelle als Serienschaltung von (unendlich) vielen Quellen betrachtet - mit jeweils unterschiedlichen Frequenzen. Jede Quelle wird anschliessend einzeln betrachtet.

## 3.2 Fourierreihe

Fourierreihen können beliebige T-periodische Funktionen als Linearkombination von (unendlich) vielen Sinus und Cosinusfunktionen mit unterschiedlichen Frequenzen darstellen. Diese Eigenschaft nutzen wir aus, wenn wir Netzwerke betrachten, welche mit periodischen Signalen (idR. nicht-cosinusförmig) angeregt werden. Dabei können die Koeffizienten wie folgt berechnet werden können:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

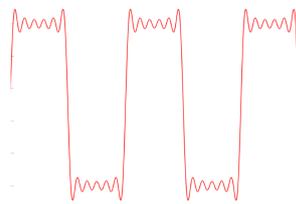


Figure 2: Darstellung eines beliebigen T-periodischen Signals  $f(t)$  (zB. Signal unten rechts) als Fourierreihe, inklusive der Formeln für die verschiedenen Fourierkoeffizienten  $a_0$ ,  $a_k$  und  $b_k$ .

Der Koeffizient  $a_0$  beschreibt den Gleichanteil der Funktion (DC-offset). Die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  beschreiben den geraden, beziehungsweise den ungeraden Anteil von  $f(t)$ .

### 3.2.1 Symmetrieeigenschaften

Wir unterscheiden die T-periodischen Signale in **Gerade** und **Ungerade**, wobei jede der beide Kategorien zusätzlich eine **Halbwellensymmetrie** aufweisen kann. Die Ausnutzung dieser Symmetrieeigenschaften kann die Berechnung der Fourierreihen massiv erleichtern.

Bemerkung: Wir können ein Signal eventuell auch durch Verschiebung (horizontal oder vertikal) "symmetrisch machen". Eine vertikale Verschiebung hat dabei nur einen Einfluss auf  $a_0$ , wobei eine horizontale Verschiebung einen Einfluss auf die Phase von allen Koeffizienten hat.

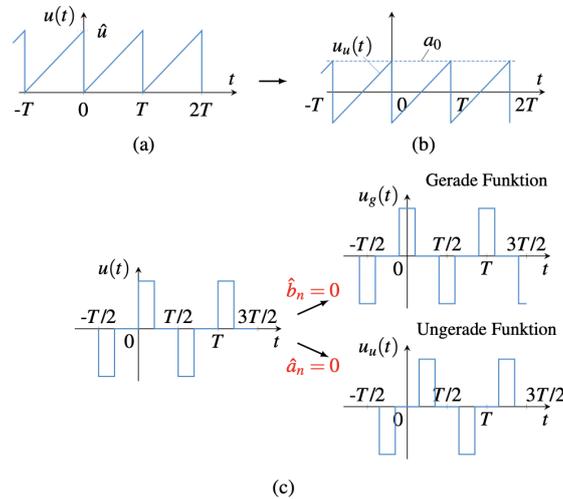
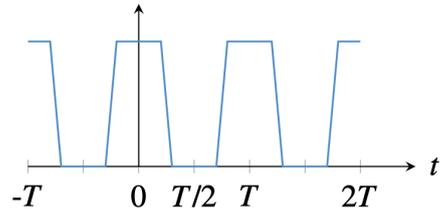


Figure 3: Verschiebung von Signalen, um sie symmetrisch "zu machen".

Folgende Abbildungen sollen einen Überblick über die Symmetrieeigenschaften verschaffen.

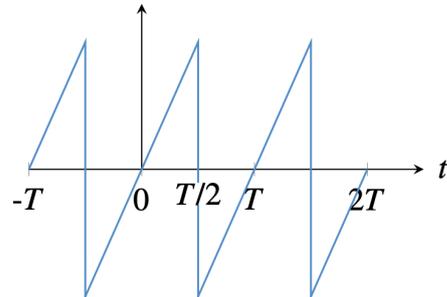
▷ Gerade Funktion (Abbildung 4.15a)

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u(-t) \\
 a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u(t) dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} u(t) dt \\
 \hat{a}_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cos(n\omega t) dt, \quad \hat{b}_n = 0
 \end{aligned}$$



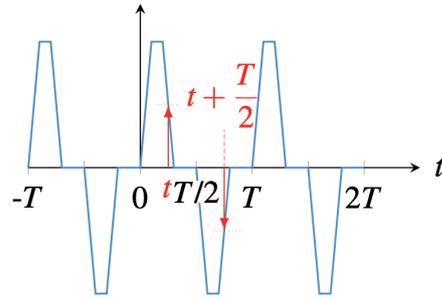
▷ Ungerade Funktion (Abbildung 4.15b)

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -u(-t) \quad a_0 = 0 \quad \hat{a}_n = 0 \\
 \hat{b}_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin(n\omega t) dt
 \end{aligned}$$



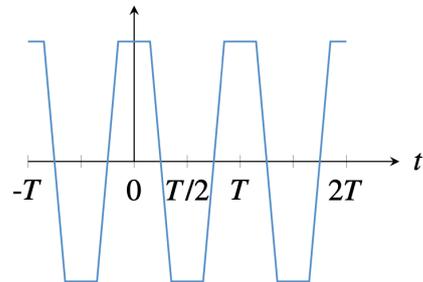
▷ Halbwelligensymmetrie (Abbildung 4.15c)

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -u(t+T/2) \quad a_0 = 0 \quad \hat{a}_{2n} = 0 \quad \hat{b}_{2n} = 0 \\
 \hat{a}_{2n-1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cos[(2n-1)\omega t] dt \\
 \hat{b}_{2n-1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin[(2n-1)\omega t] dt
 \end{aligned}$$



▷ Gerade Funktion mit Halbwelligensymmetrie (Abbildung 4.16a)

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u(-t) = -u(t+T/2) \\
 \hat{b}_n &= 0 \quad a_0 = 0 \quad \hat{a}_{2n} = 0 \\
 \hat{a}_{2n-1} &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} u(t) \cos[(2n-1)\omega t] dt
 \end{aligned}$$



▷ Ungerade Funktion mit Halbwelligensymmetrie (Abbildung 4.16b)

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -u(-t) = -u(t+T/2) \\
 a_0 &= 0 \quad \hat{a}_n = 0 \quad \hat{b}_{2n} = 0 \\
 \hat{b}_{2n-1} &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} u(t) \sin[(2n-1)\omega t] dt
 \end{aligned}$$

8

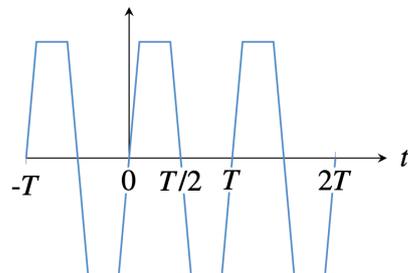


Figure 4: Übersicht der verschiedenen Symmetrieeigenschaften von T-periodischen Signalen.

### 3.2.2 Effektivwert und Leistung

Der Effektivwert einer Grösse, die als Fourierreihe dargestellt werden kann berechnet sich nach folgender Formel:

$$\begin{aligned}
 U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(n\omega t) \right\}^2 dt} \\
 &= \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2)} = \sqrt{a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\hat{c}_n}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}
 \end{aligned}$$

Figure 5: Effektivwert von T-periodischem  $u(t)$  via Fourierreihe. Dabei sind  $U_n = \frac{\hat{c}_n}{\sqrt{2}}$  sowie  $U_n^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ .

Die Wirkleistung  $P$ , im Gegensatz zu der Scheinleistung  $S$ , enthält keine Mischterme mit unterschiedlichen Frequenzen:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{a}_{u,n} \hat{a}_{i,n} + \hat{b}_{u,n} \hat{b}_{i,n}) = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n \hat{i}_n \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n})$$

$$S = UI = \sqrt{\left( U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{u}_n)^2 \right) \left( I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{i}_n)^2 \right)}$$

Figure 6: Wirkleistung  $P$  und Scheinleistung  $S$  von T-periodischen Signalen.

Somit enthält  $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$  auch Mischtherme, und genauso der Leistungsfaktor  $\lambda$ .

Weitere Kenngrößen sind auf der Zusammenfassung gegeben.

## 4 Schaltvorgänge - DGL

### 4.0.1 Motivation

Bisher wurden nur Netzwerke mit cosinusförmigen (oder konstanten) Anregungen betrachtet, welche schon (sehr) lange angeschaltet sind (eingeschwungen sind / sich im steady-state befinden). Neu sollen auch nichtperiodische Schaltvorgänge bei  $t = t_0$  betrachtet werden. Falls in den Netzwerken Energiespeicher (Induktivitäten oder Kondensatoren) auftreten, dürfen sich die Spannung in den Kondensatoren, beziehungsweise der Strom in den Induktivitäten nicht sprunghaft ändern, da die Zeitverläufe der Energien stetig sein müssen:

$$\begin{aligned} W_C(t) &= \frac{1}{2} \cdot C u_C(t)^2 \\ W_L(t) &= \frac{1}{2} \cdot L i_L(t)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

### 4.1 Vorgehen

1. Anfangsbedingungen aufstellen (steady-state vor Schaltpunkt  $t_0$ )
2. DGL aufstellen  $f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + a_1f + a_0 = g$  (Maschen- oder Knotengleichungen)
  - Verwende die Zusammenhänge der Abbildung 7
  - Bei Induktivitäten DGL abhängig von  $i_L(t)$  ausdrücken
  - Bei Kondensatoren DGL abhängig von  $u_C(t)$  ausdrücken
3. DGL lösen
  - Partikuläre Lösung  $f_p(t)$  bestimmen: Eingeschwungener Zustand für  $t \rightarrow \infty$
  - Homogene Lösung  $f_h(t)$  bestimmen:
    - Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen
    - Meist Exponentialansatz (Achtung: k-fache Nullstellen oder komplexe Nullstellen)
  - Allgemeine Lösung bestimmen:  $f(t) = f_h(t) + f_p(t)$
  - Spezielle Lösung durch Einsetzen der Anfangsbedingungen bestimmen

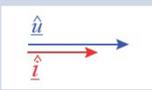
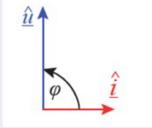
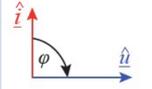
Bauelement	Zeitbereich	Bildbereich	Zeigerdiagramm
Widerstand	$\mathbf{u}_R = R \cdot \mathbf{i}_R$	$\hat{u}_R = R \cdot \hat{i}_R$	
Induktivität	$\mathbf{u}_L = L \cdot \frac{d\mathbf{i}_L}{dt}$	$\hat{u}_L = j\omega L \cdot \hat{i}_L$	
Kondensator	$\mathbf{u}_C = \frac{1}{C} \cdot \int \mathbf{i}_C dt$ $\mathbf{i}_C = C \cdot \frac{d\mathbf{u}_C}{dt}$	$\hat{u}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \hat{i}_C$ $= -\frac{j}{\omega C} \cdot \hat{i}_C$	

Figure 7: Übersicht der Strom/Spannungsverhältnisse im Zeitbereich (sowie im Bild- und Zeigerbereich) zum aufstellen der DGL von Schaltvorgängen.

## 4.2 DGL lösen

Durch Aufstellen der Maschen/Knotengleichungen und anschliessendem Ausdrücken der Terme durch unsere gesuchte Grösse  $f(t)$  erhält man folgende DGL:

$$f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + a_1f + a_0 = g \quad (2)$$

### 4.2.1 Homogene Lösung

Die DGL von einem Netzwerk mit  $n$  Energiespeichern hat allgemein die folgende Form:

$$f_h^{(n)} + a_{n-1}f_h^{(n-1)} + \dots + a_0f_h = \mathbf{0} \quad (3)$$

Zuerst muss das charakteristische Polynom aufgestellt, und anschliessend dessen  **$n$  Nullstellen**  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gefunden werden:

$$\lambda^{(n)} + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \dots + a_1\lambda + a_0 = \mathbf{0} \quad (4)$$

Die allgemeine Form der homogenen Lösung hat die Form:

$$f_h(t) = A_1e^{\lambda_1 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t} \quad (5)$$

In folgenden Fällen ist Vorsicht geboten:

- bei doppelter Nullstelle ( $\lambda_1 = \lambda_2$ )  
–  $A_1e^{\lambda_1 t} + A_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_2 t}$  ANSTATT  $A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t}$
- bei  $k$ -facher Nullstelle ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ )  
–  $A_1e^{\lambda_1 t} + A_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_2 t} + \dots + A_k \cdot t^{k-1} \cdot e^{\lambda_k t}$

Die  $n$  Koeffizienten  $A_1, \dots, A_n$  werden durch die Anfangsbedingungen (Gleichungssystem) festgelegt.

### 4.2.2 Partikuläre Lösung

Die Partikuläre Lösung beschreibt grundsätzlich den eingeschwungenen Zustand des Netzwerkes für  $t \rightarrow \infty$ .

$$f_p^{(n)} + a_{n-1}f_p^{(n-1)} + \dots + a_0f_p = \mathbf{g}(t) \quad (6)$$

Dabei beschreibt  $g(t)$  den Quellterm.

Zum Lösen der partikulären Lösung stehen uns theoretisch 2 Möglichkeiten offen: Ansatz(tabelle), oder den eingeschwungenen Zustand berechnen, wobei sich dieses Skript auf die Berechnung des eingeschwungenen Zustands beschränkt. Dabei können 3 Fälle unterschieden werden:

- Quelle Gleichgrösse (Gleichspannung/strom)
  - $L \rightarrow$  Kurzschluss
  - $C \rightarrow$  Leerlauf
- Quelle "einfache" Wechselspannung  $\rightarrow$  "gewöhnliche" Zeigerrechnung
- Quelle allgemein T-periodisch  $\rightarrow$  Harmonische Analyse/Fourierreihe

Die Partikuläre Lösung  $f_p(t)$  darf keine freien Koeffizienten mehr enthalten!

### 4.2.3 Beispiel: RC-Netzwerke

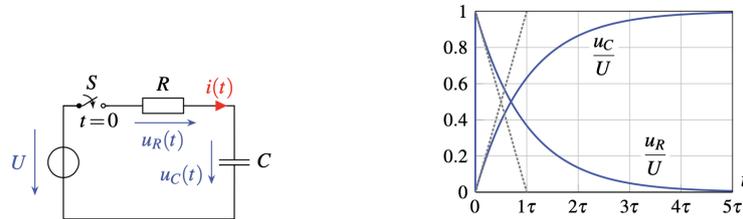


Figure 8: Rechts: RC Netzwerk mit einem Kondensator C und einem Widerstand R. Links: Spannungsverlauf über dem Kondensator (nicht sprunghaft!), und über dem Widerstand (sprunghaft).  $\tau = R_{in}C$  [s]. Ausserdem gilt hier speziell  $R = R_{in}$ , sowie  $u_c(0) = 0$ .

Die Lösung für die Spannung über einem Kondensator  $u_c(t)$  in Netzwerken mit einem Kondensator C und (mindestens) einem Widerstand R (beispielweise Netzwerk 8 hat folgende Form:

$$u_c(t) = u_{c,p}(t) - [u_{c,p}(t_0) - u_c(t_0)] e^{-\frac{t-t_0}{R_{in}C}}$$

↑ Wert der Partikulären (stationären) Lösung bei  $t = t_0$ 
↑ Anfangswert

↑ Innenwiderstand, von der Kapazität aus betrachtet bei geschl. Schalter

Figure 9: Lösung der Spannung über eines Kondensators C mit sonst nur Widerständen im Netzwerk.  $u_{c,p}(t)$  beschreibt dabei den eingeschwungenen Zustand für  $t \rightarrow \infty$ . Der Anfangswert  $u_c(t_0)$  beschreibt den (steady-state) vor dem Schaltvorgang  $t_0$ .

Der Ersatzwiderstand  $R_{in}$ , vom Kondensator aus betrachtet, wird analog zum Vorgehen bei Ersatzquellen berechnet.

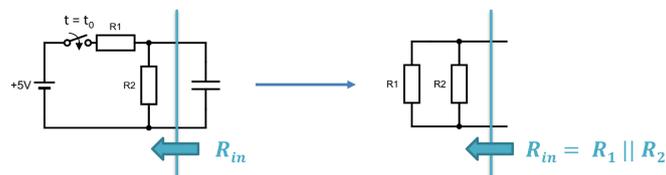
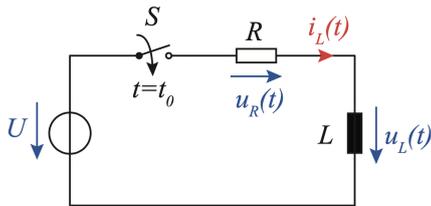
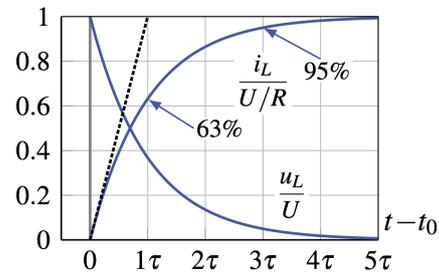


Figure 10: Beispielsberechnung eines Ersatzwiderstandes  $R_{in}$  in einem Netzwerk mit nur einem Kondensator und mindestens einem Widerstand.

#### 4.2.4 Beispiel: RL-Netzwerke



((a)) Netzwerk mit einer Induktivität und einem Widerstand. Idealer Schalter S wird zum Zeitpunkt  $t_0$  geschlossen



((b)) Zeitverlauf der Spannung (sprunghaft) und Stromes (nicht sprunghaft!) durch die Induktivität.  $\tau = \frac{L}{R}$  [s]. Ausserdem gilt hier speziell  $R = R_{in}$ , sowie  $i_L(0) = 0$ .

Die Lösung für den Strom durch eine Induktivität in Netzwerken mit einer Induktivität L und (mindestens) einem Widerstand R (beispielsweise Netzwerk 11(a)) hat folgende Form:

$$i_L(t) = i_{L,p}(t) - [i_{L,p}(t_0) - i_L(t_0)]e^{-R_{in,L}\frac{t-t_0}{L}}$$

Figure 12: Lösung des Stromes durch eine Induktivität mit sonst nur Widerständen im Netzwerk.  $i_{L,p}(t)$  beschreibt dabei den eingeschwungenen Zustand für  $t \rightarrow \infty$ . Der Anfangswert  $i_L(t_0)$  beschreibt den (steady-state) vor dem Schaltvorgang  $t_0$ .

Der Ersatzwiderstand  $R_{in}$ , von der Induktivität aus betrachtet, wird analog zum Vorgehen bei Ersatzquellen berechnet.

## 5 Netzwerkanalyse mit Laplacetransformation

Motivation: Falls ein Netzwerk von einem nicht-periodischen Signal angeregt wird, beispielsweise der Einheitssprungfunktion  $\sigma(t)$ , konvergiert die Fouriertransformation nicht. Mit der Laplacetransformation können auch nicht-periodische Signale "einfacher" analysiert werden, da die Ableitungen und Integrale im Laplacebereich (hier oft Bildbereich genannt) einfacher sind, und die Laplacetransformationen/Rücktransformationen oft in einer Korrespondenztabelle gegeben sind. Es ist daher oft schneller ein Problem in den Laplacebereich zu transformieren, dort zu lösen, und anschliessend wieder in den Zeitbereich zurück zu transformieren.

### Laplace Eigenschaften und Korrespondenzen

Laplace-Transformation ist Weiterentwicklung der Fourier-Transf. Gehen für  $s = j\omega$  ineinander über. Bedingung:  $u(t) = 0$  für  $t < 0$ .

Komplexe Frequenz  $s = \sigma + j\omega$ ,  $d\omega = \frac{1}{j} ds$

Laplace Transformation  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma} U(s)e^{st} ds$   $\circ \rightarrow$   $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt$

$u(t)$	$\circ \rightarrow$	$U(s)$	$u(t)$	$\circ \rightarrow$	$U(s)$
$u(at), a > 0$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{a} U\left(\frac{s}{a}\right)$	$\lambda u(t) + \mu v(t)$	$\circ \rightarrow$	$\lambda U(s) + \mu V(s)$
$u(t - t_0)$	$\circ \rightarrow$	$e^{-st_0} U(s)$	$e^{-at} u(t)$	$\circ \rightarrow$	$U(s + a)$
$-t u(t)$	$\circ \rightarrow$	$U'(s)$	$t^2 u(t)$	$\circ \rightarrow$	$U''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ \rightarrow$	$U^{(n)}(s)$	$u''(t)$	$\circ \rightarrow$	$s^2 U(s) - s u(0) - u'(0)$
$u'(t)$	$\circ \rightarrow$	$s U(s) - u(0)$			
$u^{(n)}(t)$	$\circ \rightarrow$	$s^n U(s) - s^{n-1} u(0) - s^{n-2} u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau) d\tau$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s} U(s)$	period. mit $T$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T u(t) e^{-st} dt$
$\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s\tau + 1}$	$1 - e^{-t/\tau}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s(s\tau + 1)}$
$\frac{1}{\tau^2} t e^{-t/\tau}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{(s\tau + 1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2})$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$
$\text{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2}$	$t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2(\tau s + 1)}$
$\cos(\omega t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$E(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1)E(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2(s - a)}$
$\exp(at)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s - a}$			

Figure 13: Laplace Korrespondenztabelle der Zusammenfassung.

## 5.1 Allgemeines und Eigenschaften

Die Allgemeine Laplacetransformation eines Signales im Zeitbereich  $u(t)$ , sowie Rücktransformation lauten:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt \quad (7)$$

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} U(s)e^{st} ds \quad (8)$$

Dabei werden wir im Folgenden die Linearität des Laplaceoperators  $\mathcal{L}$  oft ausnutzen, um uns unbekannte Signale als Summe von (zeitverschobenen) Signalen zu schreiben, die in der Korrespondenztabelle aufgeführt sind:

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + a_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (9)$$

Die Wirkung von Integralen und Ableitungen im Zeitbereich auf die Laplace-Transformation lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} &= \frac{F(s)}{s} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} &= sF(s) - f(t=0) \end{aligned} \quad (10)$$

wobei  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  die Laplace-Transformierte der Funktion  $f(t)$  ist. Die Laplace-Transformation der  $n$ -ten Ableitung einer Funktion  $f(t)$  ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (11)$$

### 5.1.1 Einheitssprungfunktion und Zeitverschiebung

Eine relativ wichtige Funktion der Laplacetransformation ist die Einheitssprungfunktion  $E(t) = \sigma(t)$ .

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (12)$$

Durch die Überlagerung von  $\sigma(t)$  können viele Funktionen realisiert werden:

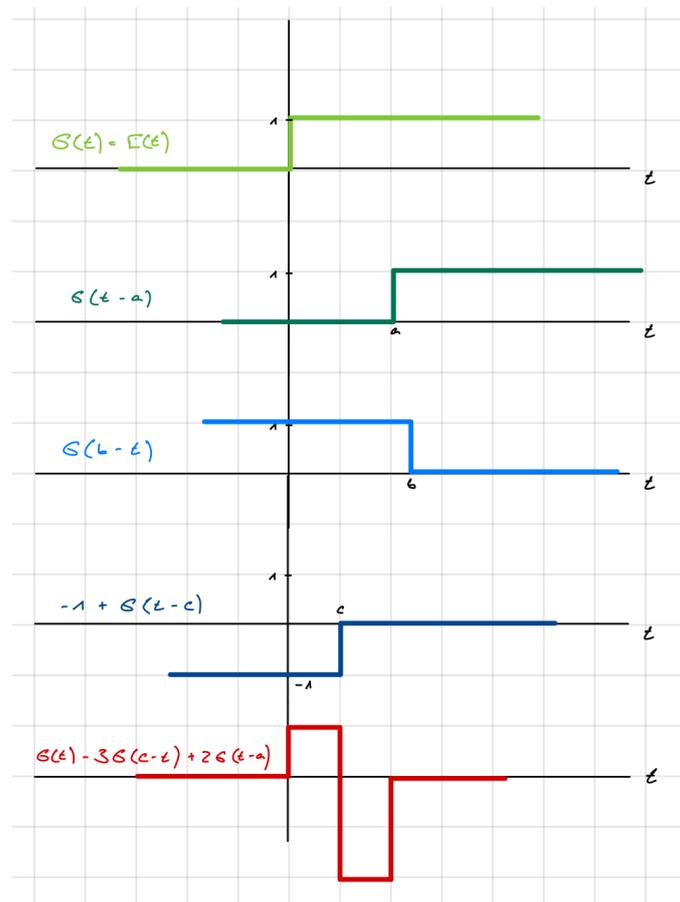


Figure 14: .

$\sigma(t)$  kann auch mit Funktionen multipliziert werden, um deren (zeitverschobenen) Schaltzeitpunkt zu beschreiben:

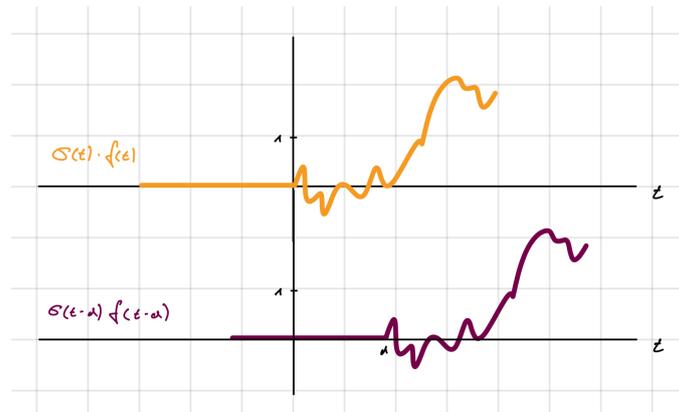


Figure 15: Oben: Signal mit Schaltzeitpunkt  $t = 0$ . Unten: Zeitverschobenes Signal (Einschaltzeitpunkt bei  $t = d$ ).

Dabei verhalten sich die Laplacetransformationen in der obigen Abbildung 15 wie folgt:

$$\mathcal{L}\{\sigma(t) \cdot f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\sigma(t-d) \cdot f(t-d)\} &= \int_0^{\infty} \sigma(t-d) f(t-d) e^{-st} dt \\
 &= \int_d^{\infty} f(t-d) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(y) e^{-s(y+d)} dy \quad (\text{Substitution } y = t-d) \\
 &= \int_0^{\infty} f(y) e^{-sy} e^{-sd} dy \\
 &= e^{-sd} \int_0^{\infty} f(y) e^{-sy} dy \\
 &= e^{-sd} \mathcal{L}\{f(t)\} \\
 &= e^{-sd} F(s)
 \end{aligned}$$

**Fazit:** Eine Verschiebung um  $t_0$  im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation mit  $e^{-st_0}$  im Laplacebereich.

## 5.2 Laplace-Ersatzschaltbilder

Bei der Analyse eines Netzwerkes mittels Laplacetransformation muss das Netzwerk als erstes in den Laplacebereich "transformiert" werden:

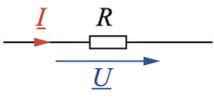
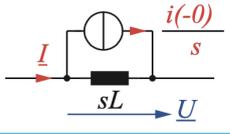
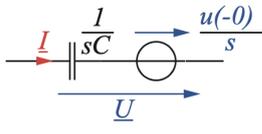
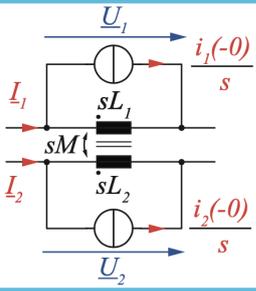
Komponente	Spannung	Strom
	$\underline{U} = R\underline{I}$	$\underline{I} = \underline{U} / R$
	$\underline{U} = sL\underline{I} - Li(-0)$	$\underline{I} = \frac{1}{sL} \underline{U} + \frac{i(-0)}{s}$
	$\underline{U} = \frac{1}{sC} \underline{I} + \frac{u(-0)}{s}$	$\underline{I} = sC\underline{U} - Cu(-0)$
	<b>Transformator-Gleichungen</b> $\underline{U}_1 = sL_1\underline{I}_1 - L_1i_1(-0) + sM\underline{I}_2 - Mi_2(-0)$ $\underline{U}_2 = sM\underline{I}_1 - Mi_1(-0) + sL_2\underline{I}_2 - L_2i_2(-0)$	

Figure 16: Ersatzschaltbilder der Bauelemente im Laplacebereich mit Berücksichtigung der Ströme/Spannungen zum Schaltzeitpunkt.

## 5.3 Vorgehen

- Netzwerk in den Bildbereich Zeichnen (siehe Abbildung 16)
- Quelle in den Bildbereich transformieren
  - Analytische Funktion → Korrespondenztabelle
  - Graphische Funktion → analytische Funktion aufstellen → Korrespondenztabelle
- Maschen und Knotengleichungen im Bildbereich aufstellen
  - Anfangswerte der Ströme/Spannungen der Bauteile einsetzen
- Gleichungen im Bildbereich lösen → gesuchte Teilgrösse im Bildbereich
- Umformen der Teilgrösse bis ihr die Funktion in der Korrespondenztabelle erkennt (evt. Partialbruchzerlegung)
- Rücktransformation mit der Tabelle
- Evt. mit der Einheitssprungfunktion multiplizieren  $\sigma(t)$

### 5.3.1 Partialbruchzerlegung

Die Partialbruchzerlegung PBZ kann verwendet werden, falls ihr eine Funktion bei der Rücktransformation nicht direkt in der Korrespondenztabelle findet. Dazu muss die Funktion zuerst in die Nullstellenform gebracht werden. Anschliessend muss mit dem Nenner der Linken Seite erweitert werden.

**Einfache** Nullstellen:

$$\frac{1}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - s_n} \quad (14)$$

**M-fache** Nullstellen:

$$\frac{\text{Polynom}(\text{Grad} \leq m)}{(s - s_1)^m} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{(s - s_1)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(s - s_1)^m} \quad (15)$$