Dez. 22

Hey ciao :)

Anbei sind mein Lösungsvorschlag für die Basisprüfung: Sommer 18

Die habe ich damals während meiner eigenen Lernphase geschrieben.

Ich kann also weder für Vollständigkeit, noch Richtigkeit garantieren und bin um Verbesserungen sehr dankbar :)

Die Beweisaufgabe habe ich jeweils weggelassen
(zu unwahrscheinlich, dass nochmals eine sehr ähnliche Aufgabe kommt)

jamatter@student.ethz.ch

Basisprüfung Lineare Algebra

Datum	Samstag, 24. August 2019	Note

1	2	3	4	5	6	Total	Bonus	
6 P	6 P	6 P	6 P	6 P	6 P	36 P	Übungen	Anz. Blätter

Auf die Aufgaben dürfen Sie erst auf Anweisung des Assistenten umblättern! Sie können die Hinweise jedoch jetzt durchlesen.

Allgemeine Hinweise:

- Kleben Sie das Etikett mit Ihrem Namen oben auf dem grossen leeren Feld auf.
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine**.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet (jeweils 6 Punkte).
- Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert! Davon ausgenommen ist nur Aufgabe 6 (Multiple-Choice-Aufgabe).
- Tragen Sie die Lösung von Aufgabe 6 (Multiple-Choice-Aufgabe) auf dem Extrablatt (letzte Seite dieser Prüfung) ein.

- Beginnen Sie jede der sechs Aufgaben auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf **alle** Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen, und arbeiten Sie sorgfältig.

Vor dem Start der Prüfung:

- Ein Etikett mit Ihrem Namen sollte auf dem Couvert sein und das zweite Etikett auf der vordersten Seite der Prüfungsaufgaben.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- Legen Sie genug leere Blätter auf dem Tisch bereit, sodass Sie nicht mehr zur Tasche greifen müssen.

Am Ende der Prüfung:

- Geben Sie die Prüfungsaufgaben und auch Ihre Antworten gemeinsam in das Couvert.
- Kleben Sie das leere Etikett auf die Lasche des Couverts, sodass das Couvert versiegelt ist, und unterschreiben Sie auf das Etikett. (Benutzen Sie *nicht* die Kleblasche des Couverts.)
- Warten Sie bis alle Prüfungen gezählt sind.

Bei Fragen und Unklarheiten fragen Sie die anwesenden Assistenten.

Viel Erfolg!

Notenskala: Die maximal erreichbare Punktzahl ist 36. Für die Note 6.00 benötigen Sie mindestens 34 und für die Note 4.00 mindestens 17 Punkte.

Dr. V. Gradinaru | D-ITET, D-MATL, RW
Lineare Algebra | Sommer 2019

Extrablatt: Aufgabe 6

Name: ____________________________

Tragen Sie auf dieses Extrablatt die Lösungen zu den "Richtig oder Falsch"-Fragen aus Aufgabe 6 ein, indem Sie das Kästchen **ankreuzen**, welches der korrekten Antwort entspricht. Tragen Sie oben Ihren Namen ein.

Bewertungsschema: Jede *korrekte* Antwort gibt einen Punkt, jedes *nicht korrekt gesetzte* Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Für jede Teilaufgabe, für die *kein Kreuz* gemacht wurde, gibt es 0 Punkte. Die Summe der Punktzahlen für die ganze Aufgabe 6 wird, falls negativ, auf 0 aufgerundet.

Teilaufgabe	Richtig	Falsch
a)	☐	☒
b)	☒	☐
c)	☐	☒
d)	☐	☒
e)	☐	☒
f)	☐	☒

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

2. [6 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem erster Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$ zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix A und der Vektor b wie folgt:

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir wollen die Singulärwertzerlegung von A finden, also $A = U\Sigma V^\top$.

a) Bestimmen Sie Σ.

b) Bestimmen Sie V und U.

c) Berechnen Sie $\min_{v\in\mathbb{R}^1} \|Av - b\|_2$ und geben Sie ein x an, sodass $\|Ax - b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^1} \|Av - b\|_2$.

Bitte wenden!

4. [6 Punkte] Seien $\mathcal{G}_3 = \text{span}\{1, t, t^2\}$ und $\mathcal{U}_3 = \text{span}\{1, t, t^2\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}_3$ nach $\mathcal{U}_3$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{G}_3 & \longrightarrow & \mathcal{U}_3 \\ & x(t) & \longmapsto & x(0) + t \cdot x'(0) + \frac{1}{2}t^2 \cdot x''(0), \end{array}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}_3$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}_3$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = x(0) + t \cdot x'(0) + \frac{1}{2}t^2 \cdot x''(0)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}_3$ und $\mathcal{U}_3$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ beziehungsweise $\mathcal{U}_3$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 + t, \qquad p_2(t) = 1 - t, \qquad p_3(t) = 1 + t + t^2\,,$$

und

$$q_1(t) = t, \qquad q_2(t) = 1 + t^2, \qquad q_3(t) = 1 - t^2\,.$$

d) Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$ aus Teilaufgabe **c**) beschrieben wird?

5. [6 Punkte] Seien $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie die folgende Aussage:

Es gilt $AB = AC$, genau dann wenn gilt $A^H AB = A^H AC$.

Siehe nächstes Blatt!

6. [6 Punkte] Multiple-Choice: Auf dem Extrablatt “Richtig” oder “Falsch” ankreuzen.

a) Der folgende Code beschreibt einen Algorithmus in Matlab mit Input `A`:

```
>>[m, n] = size(A);
>>B = zeros([m, n]);
>>C = zeros([n, n]);
>>for j = 1 : m
>>    vj = A(:, j);
>>    for i = 1 : j
>>        C(i, j) = B(:, i).' * A(:, j);
>>        vj      = vj - C(i, j) * B(:, i);
>>    end
>>    C(j, j) = norm(vj);
>>    B(:, j) = vj / C(j, j);
>>end
```

Dieser Algorithmus beschreibt ein Verfahren zur Diagonalisierung der Matrix `A`.

b) Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix, dessen Kern die Dimension 0 hat.

Somit ist $\det(A) \neq 0$.

c) Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Falls $m < n$, dann hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.

d) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrizen, und sei A zusätzlich invertierbar.

Dann ist $A^{-1}B$ symmetrisch.

e) Sei A eine reelle, invertierbare $n \times n$ Matrix, und sei $I + A$ invertierbar.

Dann ist $(I + A)^{-1} = I - A^{-1}$.

f) Die reelle $n \times n$ Matrix A hat n reelle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Somit gilt $\det(A^{-1}) = 1/(\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)$.

PRÜFUNG_SOMMER19_AUFGABE 1

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle a^{(1)}, a^{(2)} \rangle &= 8 - 16 + 8 = 0 \\ \langle a^{(1)}, a^{(3)} \rangle &= 4 + 28 - 32 = 0 \\ \langle a^{(2)}, a^{(3)} \rangle &= 32 - 28 - 4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \langle a^{(i)}, a^{(j)} \rangle = 0 \quad \forall_{i,j}$$

$\Longleftrightarrow$ STEHEN ORTHOGONAL ZUEINANDER.

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 7 & 0 \\ 8 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \underset{III - 8I}{\overset{II - 4I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & -36 & -9 & 0 \\ 0 & -63 & -36 & 0 \end{array}\right] \overset{III - \frac{63}{36} II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & -36 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \text{VOLLER RANG } (r = 3)$$

SICHER NICHT $= 0$!
$\left(\approx \frac{-216}{7}\right)$

$\Longrightarrow$ $Ax = 0$ HAT NUR TRIVIALE LÖSUNG $x = 0$

$\Longrightarrow$ ALLE SPALTEN SIND LINEAR UNABHÄNGIG.

c)

$$\|a^{(1)}\|_2 = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = 9$$

$$\|a^{(2)}\|_2 = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2} = 9$$

$$\|a^{(3)}\|_2 = \sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2} = 9$$

$$\Longrightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}}} = \underline{\underline{\frac{1}{9} A}}$$

$$\longrightarrow \quad R = 9 \cdot I_3 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}}$$

PRÜFUNG_SOMMER 18_ AUFGABE 2

a)

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

EIGENWERTE : $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$$(1-\lambda)^2(-\lambda) + 4 + 4 - (-\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

$$(1-\lambda)^2(-\lambda) + 9\lambda \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda\left[(1-\lambda)^2(-1) + 9\right] \overset{!}{=} 0 \qquad \underline{\underline{\tilde{\lambda}_1 = 0}}$$

$$(-1)(1 - 2\lambda + \lambda^2) + 9 \overset{!}{=} 0$$

$$-\lambda^2 + 2\lambda + 8 \overset{!}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$ MITTERNACHTSFORMEL : $\lambda_{2/3} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow \tilde{\lambda}_2 = 4$, $\tilde{\lambda}_3 = -2$

ACHTUNG !

$$\Longrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= \tfrac{1}{2}\tilde{\lambda}_1 = 0 \\ \lambda_2 &= \tfrac{1}{2}\tilde{\lambda}_2 = 2 \\ \lambda_3 &= \tfrac{1}{2}\tilde{\lambda}_3 = -1 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ EV zu $\lambda_1 = 0$: $(A - \lambda_1 I)x = 0$

VORFAKTOR SPIELT KEINE ROLLE FÜR EIGENRAUM :)

$$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{\cdot 2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{III - I}{\overset{II + 2I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow E_0 = \left\{\begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\overset{\text{z.B.}}{\Longrightarrow} \underline{\underline{EV_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

$\rightsquigarrow$ ANALOG zu $\lambda_2 = 2$: .... $\Longrightarrow E_2 = \left\{\begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\right\} \longrightarrow$ z.B. $EV_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$

$\lambda_3 = -1$: ... $\Longrightarrow E_{-1} = \left\{\begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\right\} \longrightarrow$ z.B. $EV_{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$

PRÜFUNG_SOMMER 18_ AUFGABE 2

$$\Longrightarrow \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\dot{y} = Ay = TDT^{-1}y = TDz \qquad \text{MIT } z := T^{-1}y$$

$$T^{-1}\dot{y} = Dz$$

$$\dot{z} = Dz \quad \Longrightarrow \quad z = e^{D} \cdot z_0$$

$$y = Tz = Te^{D}z_0$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = e^{0t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot C_1 + e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot C_2 + e^{(-1)t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} C_3$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot C_1 + e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot C_2 + e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} C_3$$

c)

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{BZW.} \quad z(0) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = T^{-1}y(0) \quad \text{ODER} \quad Tz(0) = y(0)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{GAUSSEN}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} C_3 &= \tfrac{1}{2} \\ C_2 &= 0 \\ C_1 &= \tfrac{-1}{2} \end{aligned}$$

EINSETZEN

$$\Longrightarrow \quad y(t) = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-t}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

AUFGABE 3 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad A^T A = [25] \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 25 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_1 = 5 \overset{!}{>} 0$$

a) $$\Sigma := \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left(\hat{=} \text{ DIM}(A)\right)$$

b) $$\text{BILD}(A^T A) = \text{SPAN}\{[1]\} \quad \Longrightarrow \quad V = [1] \qquad (\text{NORMIERT})$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} [1] = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

IST SCHON NORMIERT :)

$$u_2 \overset{!}{\perp} u_1 \quad \Longrightarrow \quad u_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

"EDUCATED GUESS" (AUCH NORMIEREN!)

$$u_3 \overset{!}{\perp} u_2 \text{ UND } u_1 \quad \Longrightarrow \quad u_3 = u_2 \times u_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix}$$

NORMIEREN

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}}}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{U = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}$$

c) $$x = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T b \qquad \text{MIT} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot \left[\tfrac{1}{5}\right] \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{55}{25} = \underline{\underline{\frac{11}{5}}}$$

PRÜFUNG_SOMMER 18_ AUFGABE 4

4. **[6 Punkte]** Seien $\mathcal{G}_3 = \text{span}\{1, t, t^2\}$ und $\mathcal{U}_3 = \text{span}\{1, t, t^2\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}_3$ nach $\mathcal{U}_3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad \mathcal{G}_3 &\longrightarrow \quad \mathcal{U}_3 \\ x(t) &\longmapsto x(0) + t \cdot x'(0) + \tfrac{1}{2}t^2 \cdot x''(0), \end{aligned}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}_3$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}_3$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = x(0) + t \cdot x'(0) + \frac{1}{2}t^2 \cdot x''(0)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}_3$ und $\mathcal{U}_3$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ beziehungsweise $\mathcal{U}_3$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 + t, \qquad p_2(t) = 1 - t, \qquad p_3(t) = 1 + t + t^2,$$

und

$$q_1(t) = t, \qquad q_2(t) = 1 + t^2, \qquad q_3(t) = 1 - t^2.$$

d) Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$ aus Teilaufgabe **c)** beschrieben wird?

a) I: ADDITIVITÄT : $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$

$\mathcal{A}(x+y) \overset{?}{=} \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$

$\|$

$= (x+y)(0) + t\,(x+y)'(0) + \frac{1}{2}t^2(x+y)''(0)$

$= x(0) + y(0) + t x'(0) + t y'(0) + \frac{1}{2}t^2 x''(0) + \frac{1}{2}t^2 y''(0)$

$= x(0) + t x'(0) + \frac{1}{2}t^2 x''(0) + y(0) + t y'(0) + \frac{1}{2}t^2 y''(0) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$ ✓ ADDITIVITÄT

II : HOMOGENITÄT : $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}(x)$

$\mathcal{A}(\alpha x) \overset{?}{=} \alpha \mathcal{A}(x)$

$\alpha x(0) + \alpha t x'(0) + \alpha \frac{1}{2} t^2 x''(0)$

$\alpha(x(0) + t x'(0) + \frac{1}{2} t^2 x''(0) = \alpha \mathcal{A}(x)$ ✓ HOMOGENITÄT

PRÜFUNG_SOMMER 18_ AUFGABE 4

b) HIER SUCHEN WIR EINE MATRIX $\underline{A}$, WELCHE DIE LINEARE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ BESCHREIBT.
(BEZÜGLICH DER JEWEILIGEN MONOMIALBASEN VON G_3 NACH U_3)

⇝ ALSO WAS MACHT UNSERE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ MIT DER MONOMIALBASIS VON G_3?

1) → MONOMIALBASISVEKTOREN VON G_3 ABBILDEN

1.1) UND ALS LINEARKOMBINATION VON MONOMIALBASISVEKTOREN ALS U_3 SCHREIBEN.

2) → MATRIXFORM :)

G_3 HAT DIE MONOMIALBASIS $\{1, t, t^2\}$

U_3 HAT DIE MONOMIALBASIS $\{1, t, t^2\}$

$$\mathcal{A}(\underbrace{1}_{x(t)=1}) = \underbrace{1}_{x(0)=1} + t \cdot \underbrace{0}_{\dot{x}(0)=0} + \tfrac{1}{2}t^2 \cdot \underbrace{0}_{x''(0)=0} = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \xrightarrow{h_{U_3}} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$\mathcal{A}(\underbrace{t}_{x(t)=t}) = \underbrace{0}_{x(0)=0} + t \cdot \underbrace{1}_{\dot{x}(0)=1} + \tfrac{1}{2}t^2 \cdot \underbrace{0}_{x''(0)=0} = t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 \xrightarrow{h_{U_3}} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$\mathcal{A}(\underbrace{t^2}_{x(t)=t^2}) = \underbrace{0}_{x(0)=0} + t \cdot \underbrace{0}_{\dot{x}(0)=0} + \tfrac{1}{2}t^2 \cdot \underbrace{2}_{x''(0)=2} = t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 \xrightarrow{h_{U_3}} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

PRÜFUNG_SOMMER 19_ AUFGABE 4

c)

$$p_1 = 1\cdot 1 + 1\cdot t + 0\cdot t^2 \xrightarrow[h_{x_3}]{h_{e_3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = 1\cdot 1 - 1\cdot t + 0\cdot t^2 \xrightarrow[h_{x_3}]{h_{e_3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = 1\cdot 1 + 1\cdot t + 1\cdot t^2 \xrightarrow[h_{x_3}]{h_{e_3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇝ LINEARE UNABHÄNGIGKEIT $\Longleftrightarrow$ $Ax = 0$ $\Rightarrow$ $x \stackrel{!}{=} 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{II - I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longleftarrow \text{VOLLER RANG}$$

⟹ HOMOGENES LGS BESITZT <u>NUR</u> DIE TRIVIALLÖSUNG.

⟹ ALLE SPALTEN SIND LINEAR UNABHÄNGIG

⟹ BILDEN EINE BASIS FÜR VR

⇝ ANALOG FÜR q_1, q_2 UND q_3

$$q_1 \xrightarrow{h_{e_3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad q_2 \xrightarrow{h_{e_3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad q_3 \xrightarrow{h_{e_3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{III - I}{\overset{I \leftrightarrow II}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

⟹ HOMOGENES LGS BESITZT <u>NUR</u> DIE TRIVIALLÖSUNG.

⟹ ALLE SPALTEN SIND LINEAR UNABHÄNGIG

⟹ BILDEN EINE BASIS FÜR VR

PRÜFUNG_SOMMER 18_ AUFGABE 4

d)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
{B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}} \arrow[rr, bend left, "A"] \arrow[rrdd, phantom] & & {D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{D}_1 = \{1, t, t^2\}} \arrow[dd, bend left=60, "S"] \\
\mathcal{P}_3 \arrow[u] \arrow[d] \arrow[rr, "A"] & & \mathcal{P}_3 \arrow[u] \arrow[d] \\
{\mathcal{B}_2 = \{p_1, p_2, p_3\} \\ B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \arrow[uu, bend left=60, "T"] \arrow[rr, bend right, "B = SAT"'] & & {\mathcal{D}_2 = \{q_1, q_2, q_3\} \\ D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}
\end{tikzcd}$$

mit $T = B_1^{-1} \cdot B_2 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

mit $S = D_2^{-1} \cdot D_1 = D_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad B = SAT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}}}$$